

Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

Heiko Rieger

SS 2001

Literatur:

J.D. Jackson "Classical Electrodynamics" (Wiley, New York, 1962) bzw. "Klassische Elektrodynamik" (de Gruyter, Berlin, 1983)

W. Greiner "Klassische Elektrodynamik" (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1991)

L.D. Landau, E.M. Lifshitz "Klassische Feldtheorie"

Inhalt:**I. Elektrostatik**

1. Das Coulombsche Gesetz
2. Differentialgleichung für elektrostatische Felder
3. Elektrostatische Energie
4. Randwertprobleme
5. Separation der Laplace-Gleichung und spezielle Funktionen
6. Multipolentwicklung

II. Die Maxwellgleichungen

7. Magnetostatik
8. Das Faradaysche Induktionsgesetz
9. Der Maxwellsche Verschiebungsstrom
10. Die inhomogene Wellengleichung
11. Erhaltungssätze
12. Strahlung

III. Elektrodynamik in Materie

13. Maxwellgleichungen in Materie
14. Elektromagnetische Wellen
15. Energieerhaltung der Elektrodynamik in Materie
16. Invarianzen der Maxwellgleichung
17. Lagrangegesetze Elektrodynamik, Eichtheorie

Kapitel 1

Vorbemerkungen

1) Klassische Elektrodynamik = Maxwellsche Theorie der elektrischen und magnetischen Felder.

2) Historisches:

1785 Coulomb,

1820 Ampère, Biot-Savart, Oerstedt

1831 Faraday

1864 Maxwell

3) Klassische Elektrodynamik \longleftrightarrow Quanten-Elektrodynamik (1940-50)

4) Elektrodynamik Vorbild für relativistische (Lorentz-invariante) Feldtheorien, Ausgangspunkt für neuere Entwicklungen in der Theorie der Elementarteilchen (Nicht-abelsche Eichtheorien).

5) Anhand der Elektrodynamik lernen Sie mathematische Hilfsmittel, die auch in anderen Bereichen der Physik wichtig sind (Theorie partielle DGL). Vorausgesetzt werden die elementaren Mittel der Vektoranalysis, speziell die Rechenregeln für den Differentialoperator Nabla ∇ . (6 Produktregeln und 5 Möglichkeiten für zweite Ableitung) und die Integralsätze von Gauß und Stokes.

$$\begin{aligned}
\nabla(ab) &= a(\nabla b) + (\nabla a)b \\
\nabla(\underline{a} \cdot \underline{b}) &= (\underline{a}\nabla)\underline{b} + (\underline{b}\nabla)\underline{a} + \underline{a} \times (\nabla \times \underline{b}) - \underline{b} \times (\nabla \times \underline{a}) \\
\nabla(\underline{a}\underline{b}) &= \underline{a}(\nabla\underline{b}) + (\nabla\underline{a})\underline{b} \\
\nabla \times (\underline{a}\underline{b}) &= \underline{a}(\nabla \times \underline{b}) + (\nabla\underline{a}) \times \underline{b} \\
\nabla(\underline{a} \times \underline{b}) &= (\nabla \times \underline{a}) \cdot \underline{b} - \underline{a} \cdot (\nabla \times \underline{b}) \\
\nabla \times (\underline{a} \times \underline{b}) &= \underline{a}(\nabla\underline{b}) - (\nabla\underline{a})\underline{b} + (\underline{b}\nabla)\underline{a} - (\underline{a}\nabla)\underline{b}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \underline{a} = \Delta \underline{a}, \operatorname{rot} \operatorname{grad} \underline{a} = \underline{0}, \operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{a} = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{a} - \Delta \underline{a},$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V d^3r \operatorname{div} \underline{a} &= \oiint_{\partial V} \underline{a} \cdot d\underline{f} \\
\iint_F \operatorname{rot} \underline{a} \cdot d\underline{f} &= \oint_{\partial F} \underline{a} \cdot d\underline{s}
\end{aligned}$$

Bsp. $\operatorname{div} \underline{r} = 3$, $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\underline{r}}{r^3}$, $\operatorname{rot} \left(\frac{\underline{r}}{r} f'(r)\right) = \underline{0}$, $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\underline{r}}{r}$

6) Wir verwenden ausschließlich Gaußsche Einheiten.

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Das Coulombsche Gesetz

In der Elektrostatik ist das elektrische Feld ein “Hilfsbegriff”, ein Synonym für Kraft auf Einheitsladung. Aber: Das Feld besitzt eine eigenständige Realität: Strahlung, losgelöst von Materie, transportiert Energie, Impuls, Drehimpuls.

Die Kraft, die punktförmige Ladung q_1 auf eine andere q_2 ausübt, ist nach Coulomb (s.a. Cavendish)

$$\underline{F}_2 = q_1 q_2 \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} \quad (2.1)$$

⇒ Dimension der Ladung = $\sqrt{\text{dyn} \cdot \text{cm}^2}$

Konvention:

$$\underline{F}_2 = q_2 \underline{E}_1$$

legt das von q_1 erzeugte elektrische Feld \underline{E}_1 mit Feldstärke am Ort \underline{r} fest:

$$\underline{E}(\underline{r}) = q_1 \frac{\underline{r} - \underline{r}_1}{|\underline{r} - \underline{r}_1|^3} \quad (2.2)$$

Kräfte mehrerer Ladungen auf eine andere addieren sich vektoriell.

⇒ Gesetz der linearen Überlagerung (Superposition):

mehrere Punktladungen q_1, \dots, q_n an den Orten $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n$ erzeugen Feld

$$\underline{E}(\underline{r}) = \sum_{\nu=1}^n q_\nu \frac{\underline{r} - \underline{r}_\nu}{|\underline{r} - \underline{r}_\nu|^3} \quad (2.3)$$

Oft räumliche Verteilung von Ladungen durch ‘‘Ladungsdichte’’ $\rho(\underline{r})$ spezifiziert. Nicht nur bei sehr vielen Elementarladungen, auch bei statistischer Beschreibung von Materie (z.B. QM).

dann $q_\nu = \rho(\underline{r}_\nu) d^3 r_\nu \hat{=}$ im Volumenelement $d^3 r_\nu$ im Punkt \underline{r}_ν liegende Ladungsmenge

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int d^3 r' \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad (2.4)$$

2.1.1 Dirac’sche Deltafunktion

Läßt man für $\rho(\underline{r})$ auch Distributionen (verallgemeinerte Funktionen) zu, läßt sich (2.3) und (2.4) vereinheitlichen.

Um (2.2) wie (2.4) schreiben zu können, muß für $\rho(\underline{r})$ gelten

$$(1) \quad \rho(\underline{r}) = 0 \quad \text{für} \quad \underline{r}' \neq \underline{r}_1$$

$$(2) \quad \int d^3r' \rho(r') = q_1$$

Keine "richtige" Funktion ρ hat solche Eigenschaften, aber man kann (1) und (2) beliebig gut approximieren, z.B.

$$\boxed{g_a(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r^2/a^2}}$$
(2.5)

hat die Eigenschaften:

$$(1) \quad \lim_{a \rightarrow 0} g(r) = 0 \quad \text{für} \quad \underline{r} \neq 0$$

$$(2) \quad \int d^3r g(\underline{r}) = 1$$

Definiton:

Dirac'sche Delta-Funktion

$$\boxed{\delta(\underline{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} g_a(\underline{r})}$$
(2.6)

$\delta(\underline{r})$ hat dann die Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \delta(\underline{r}) = 0 \quad \text{für } \underline{r} \neq \underline{0} \\
 (2) \quad & \int d^3r \delta(\underline{r}) = 1
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Als Distribution mathematisch präzise fassbar, für unsere Zwecke $a \approx 10^{-16}$ ausreichend.

Es folgt $\forall f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig: $\int d^3r f(\underline{r}) \delta(\underline{r}) = f(\underline{0})$

(2.3) kann durch Ladungsdichte

$$\rho(\underline{r}) = \sum_{\nu=1}^n q_{\nu} \delta(\underline{r} - \underline{r}_{\nu})
 \tag{2.8}$$

dargestellt werden!

(2.4) enthält alle physikalische Information, die für Elektrostatik notwendig ist. Gibt für jede Ladungsverteilung ρ das elektrische Feld \underline{E} und Kraft auf Probeladung q am Ort \underline{r} .

$$\underline{F} = q \underline{E}(\underline{r})
 \tag{2.9}$$

Bei vielen Problemen der \underline{F} -Statik jedoch ρ nicht gegeben, dann (2.4) nicht nützlich. Suchen vielfältig verwendbare Form!

2.1.2 Differentialgleichung für elektrostatische Felder

Zunächst:

Satz:

Ein Vektorfeld $\underline{E}(\underline{r})$, das im Unendlichen mindestens wie $1/r^2$ verschwindet, ist durch $\operatorname{div}\underline{E}$ und $\operatorname{rot}\underline{E}$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

Annahme $\exists \underline{E}_1 \neq \underline{E}_2$ mit $\operatorname{div}\underline{E} = 0$, $\operatorname{rot}\underline{E} = 0$ wobei $\underline{E} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2$ und $E = \mathcal{O}(1/r^2)$ für $r \rightarrow \infty$.

Dann existiert ein Skalarpotential $\Phi(\underline{r})$ mit $\underline{E} = -\operatorname{grad}\Phi$.

[denn wegen $\operatorname{rot}\underline{E} = 0$ ist $\oint_L \underline{E} \cdot d\underline{s} = \iint_F \operatorname{rot}\underline{E} \cdot d\underline{f} = 0$, wobei L ein geschlossener Weg von 1 nach 2 und wieder zurück und F die von L umschlossene Fläche. D.h. \int_1^2 unabhängig vom Weg.

Also definiere $\Phi(\underline{r}) = -\int_{r_0}^r d\underline{s} \cdot \underline{E}(\underline{s})$]

Also $\operatorname{div}\underline{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = -\Delta\Phi = 0$ und $\Phi = \mathcal{O}(\frac{1}{r})(r \rightarrow \infty)$.

Weiter $-\operatorname{div}(\Phi\underline{E}) = -\Phi\operatorname{div}\underline{E} - \underline{E}\operatorname{grad}\Phi = E^2(\underline{r})$

$$\Rightarrow \int_V d^3r E^2 = -\oint_{\partial V} \Phi \underline{E} \cdot d\underline{f}$$

Nehme als Integrationsvolumen V Kugel vom Radius R und betrachte $R \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \int \Phi \cdot \underline{E} \cdot d\underline{f} \propto \frac{4\pi R^2}{R^3} \sim \mathcal{O}(1/R) \longrightarrow \text{für } R \rightarrow \infty.$$

Wenn $E^2 \geq 0$ folgt aus $\int_V d^3r E^2 = 0$ sofort $E = 0$.

Man kann sagen: Hat das Feld weder Quellen noch Wirbel (und verschwindet im Unendlichen), dann ist es Null.

Damit ist Eindeutigkeit gezeigt.

Zur Existenz von \underline{E} zu vorgegebenen $\operatorname{div}\underline{E}$ und $\operatorname{rot}\underline{E}$ später! \square

Jedes Feld $E = \mathcal{O}(1/r^2)$ kann jedenfalls durch $\operatorname{div}\underline{E}$ und $\operatorname{rot}\underline{E}$ charakterisiert werden.

Wenden Prinzip auf (2.4) an:

Für Ladungsverteilungen ρ , die auf das Endliche begrenzt sind (d.h. $\rho(\underline{r}) = 0$ außerhalb eines endlichen Gebietes) $E \sim Q/r^2$ für $r \rightarrow \infty$ mit $Q = \int |\rho(\underline{r}')| d^3r'$

Berechnung von $\operatorname{div}\underline{E}$ mit (2.4) (mit "mogeln"):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{r}/r^3) &= (\operatorname{div}\underline{r})/r^3 + \underline{r} \operatorname{grad}(1/r^3) = 3/r^3 - 3/r^3 = 0 \quad \text{für } \underline{r} \neq \underline{0} \\ \rightarrow \operatorname{div}(\underline{r}/r^3) &= \operatorname{div} \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{r}\right) = -\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{für } \underline{r} \neq \underline{0} \end{aligned}$$

Andererseits

$$\int_{K_R(\underline{0})} d^3r \operatorname{div}(\underline{r}/r^3) = \oint_{\partial K_R(\underline{0})} (\underline{r}/r^3) d \cdot \underline{f} = \oint_{\partial K_R(\underline{0})} \circ \int d \Omega = 4\pi$$

Zusammenfassend:

$$\boxed{\operatorname{div}(\underline{r}/r^3) = -\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\underline{r})} \quad (2.10)$$

Also für das elektrostatische Feld mit (2.4):

$$\boxed{\operatorname{div}\underline{E}(\underline{r}) = 4\pi\rho(\underline{r})} \quad (2.11)$$

[Mathematisch korrekt: $\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$, im Limes $a \rightarrow 0$ erhält man wieder das gewünschte Resultat. \rightarrow Jackson 1.7]

Berechnung von $\text{rot } \underline{E}$ (mit (2.4)):

$$\Phi(\underline{r}) = \int d^3r' \rho(r') \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (2.12)$$

ist Potential zu (2.4):

\Rightarrow

$$\boxed{E = -\text{grad } \Phi} \quad (2.13)$$

und somit

$$\boxed{\text{rot } \underline{E} = \underline{0}} \quad (2.14)$$

2.1.3 Die Poissongleichung

Außer durch (2.11) und (2.12) können elektrostatische Felder durch die Poissongleichung für ihr Potential Φ charakterisiert werden:

$$\boxed{\Delta \Phi(\underline{r}) = -4\pi \rho(\underline{r})} \quad (2.15)$$

Wie gezeigt, ist (2.15) eindeutig lösbar mit der RB $\Phi = \mathcal{O}(\frac{1}{r})$ für $r \rightarrow \infty$, Lösung ist (2.12)!

⇒ Satz über die Zerlegung von Vektorfeldern in longitudinalen und transversalen Anteil

Jedes Vektorfeld $\underline{E}(\underline{r})$ mit $E(\underline{r}) = \mathcal{O}(1/r^2)$ für $r \rightarrow \infty$ kann eindeutig zerlegt werden in

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_l(\underline{r}) + \underline{E}_t(\underline{r})$$

wobei $\underline{E}_{l,t} = \mathcal{O}(1/r^2)$ und $\text{rot } \underline{E}_l = \underline{0}$ und $\text{div } \underline{E}_t = \underline{0}$

Es ist

$$\underline{E}_l = \int d^3r' \text{div } \underline{E}(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (\text{wegen (2.4)})$$

und

$$\underline{E}_t = \underline{E} - \underline{E}_l$$

2.1.4 Gaußsches Gesetz

Gleichung (2.11) ist äquivalent zum Kraftflußsatz:

$$\oiint_V \underline{E} d\underline{f} = 4\pi \int_V d^3r \rho(\underline{r}) = 4\pi Q_V$$

(2.16)

Das Gesetz von Gauß (2.16) hat nützliche Anwendungen:

Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung:

Dies ist selbst kugelsymmetrisch, also ergibt (2.16) für eine Kugel vom Radius r (um Symmetriezentrum)

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \cdot 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (2.17)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{4\pi r}{r^3} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (2.18)$$

zugehöriges Potential:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r dr' \rho(r') dr' + \int_r^\infty dr' 4\pi r' \rho(r') \quad (2.19)$$

Ladungen in einer sehr dünnen Schicht: Flächenladung

(z.B. Ladungen in Metallen ordnen sich in einer Schicht von wenigen Angström Dicke an der Oberfläche an.)

Flächenladungsdichte σ durch $q_{dF} = \sigma \cdot df$

Für beliebig flache Schachtel ($d \rightarrow 0$) mit Flächenladung σ zwischen Boden und Deckel:

$$(2.16) \Rightarrow \underline{E}_1 \cdot \underline{n}_1 + \underline{E}_2 \cdot \underline{n}_2 = 4\pi\sigma \quad (2.20)$$

$$(\underline{E}_2(\underline{r}) - \underline{E}_1(\underline{r}))\underline{n}_{12}(\underline{r}) = 4\pi\sigma(\underline{r}) \quad (2.21)$$

wobei \underline{n}_{12} die von 1 nach 2 gerichtete Flächennormale ist.

Normalenkomponente des elektrischen Feldes springt an Flächenladungen.

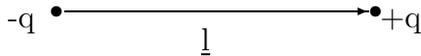
Tangentialkomponente des elektrischen Feldes immer stetig:

$$\begin{aligned} 0 = \iint \text{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f} &= \oint \underline{E} d\underline{r} \\ &= (\underline{E}_{2T} - \underline{E}_{1T}) \cdot d\underline{r} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dipolschichten: z.B. an der Oberfläche eines Kristalls

Potential eines Dipols:

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{q}{|\underline{r} - \underline{l}|} - \frac{q}{r} = q \frac{\underline{l} \cdot \underline{r}}{r^3} + q \mathcal{O}(l^2) \quad (2.23)$$



Für $\underline{l} \rightarrow \underline{0}$ wird daraus bei festem Dipolmoment $\underline{p} = q \cdot \underline{l} = const$:

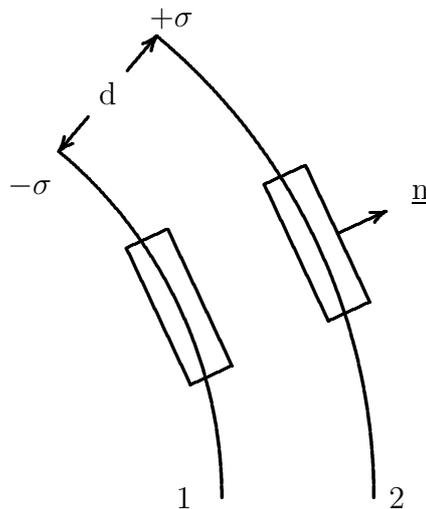
$$\varphi(\underline{r}) = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} = \underline{p} \cdot \nabla(-1/r) \quad (2.24)$$

Bei flächenhafter Anordnung von Dipolen: Dipolflächendichte D definiert durch $P_{df} = D df$

zugehöriges Potential:

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \iiint D(r') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \cdot d\underline{f} \\ &= \iint D(\underline{r}') d\Omega_{\underline{r}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Für \underline{r} auf Dipolschicht daher: $\Phi_1(\underline{r}) - \Phi_2(\underline{r}) = 4\pi D(\underline{r})$



Betrachte zwei Flächen der Ladungsdichte $\pm\sigma(\underline{r})$ im Abstand $d(\underline{r})$ ($d \ll$ Krümmungsradius) = Dipolschicht der $D = \sigma \cdot d$

Feld im Innern (Kondensator):

$$\underline{E}(\underline{r}) = -4\pi\sigma(\underline{r}) \underline{n}(\underline{r}) \text{ und } \Phi_1 - \Phi_2 = -\underline{E} \cdot \underline{d} = 4\pi D \text{ (Potentialdifferenz).}$$

2.2 Elektrostatische Energie

Eine Probeladung q im elektrostatischen Feld $\underline{E}(\underline{r})$ verspürt die Kraft

$$\underline{F} = q\underline{E}(\underline{r}) \quad (2.26)$$

Um q von \underline{r}_1 nach \underline{r}_2 zu bringen, muss man die Arbeit A leisten:

$$A = - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = -q \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \underbrace{q(\Phi(\underline{r}_2) - \Phi(\underline{r}_1))}_{\text{wegunabh.}} \quad (2.27)$$

Für $\underline{r}_1 = \infty$ (aus dem Unendlichen) nach \underline{r} (mit $\Phi(\infty) = 0$) folgt:

$$A = q\Phi(\underline{r}) \quad (2.28)$$

\implies Um überhaupt Ladungen im Endlichen anzuordnen, muss man bereits Arbeit leisten.

Bringt man die einzelnen Ladungen nacheinander an ihre Stelle, so hat man gegen die Felder bereits vorher angebrachter Ladungen zu arbeiten.

In einer Anordnung von n Ladungen q_ν an den Stellen \underline{r}_ν steckt die Energie

$$U = \sum_{\nu=1}^n q_\nu \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{\nu-1} \frac{q_\mu}{|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\nu, \mu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n \frac{q_\nu q_\mu}{|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|} \quad (2.29)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen:

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (2.30)$$

bzw. mit (2.12):

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r})\Phi(\underline{r}) \quad (2.31)$$

Mit

$$\rho \Phi = \frac{1}{4\pi} \Phi \operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(\Phi \underline{E}) - \frac{1}{4\pi} E^2 \quad (2.32)$$

folgt nach Integration über ein hinreichend großes Volumen

$$(2.33) \quad U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r E^2(\underline{r}) \quad (2.33)$$

denn

$$\int_{K_R(\underline{0})} d^3r \operatorname{div}(\Phi \underline{E}) = \int_{\partial K_R(\underline{0})} d\underline{f} \cdot (\Phi \underline{E}) = \mathcal{O}(1/R) \quad (2.34)$$

da

$$\Phi = \mathcal{O}(1/R), \quad \underline{E} = \mathcal{O}(1/R) \quad (2.35)$$

Interpretation:

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\underline{r})$$

(2.36)

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

Bemerkung:

Wesentlicher Unterschied zwischen (2.29) und (2.33): $U_B \geq 0$, $U_A \stackrel{<}{\leq} 0$.

(2.33) (Kont. Ladungsverteilung) enthält Selbstenergieterme für $\nu = \mu$, sind ∞ . Selbstenergie der Elementarladungen ist Eigenschaft des betrachteten Elementarteilchens.

Selbstenergie punktförmig geladener Teilchen \rightarrow tiefes Problem (\Rightarrow Ultraviolett-Divergenzen der QFT). Modell eines Elektrons endlicher Ausdehnung hätte zwar eine endliche Selbstenergie, erscheint aber unnatürlich und bringt auch andersartige grundsätzliche Schwierigkeiten. Die Energie einer Ladung

q , die gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche vom Radius r verteilt ist, ergibt sich nach $U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(r) \Phi(r)$ zu $q^2/2r$.

Mit der Annahme, daß diese Energie gleich der Ruhemasse des Elektrone ist, erhält man für den klassischen Elektronenradius

$$2r_e = q^2/m_e c^2 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (2.37)$$

Bemerkung:

Da

$$\int_{K_R(0)} d^3r \operatorname{div}(\Phi \underline{E}) = \oint_{\partial K_R(0)} d\underline{f} \Phi \underline{E},$$

und die beiden Terme Φ und \underline{E} mit $(\frac{1}{R})$ bzw. $(\frac{1}{R^2})$ gehen, geht das gesamte Integral für $R \rightarrow \infty$ gegen 0.

2.3 Randwertprobleme

Bei vielen Fragestellungen in der Elektrostatik sind keine Ladungen vorgegeben (dann benutzt man (2.4) oder (2.12) zur Problemlösung), sondern das Feld wird durch Randbedingungen festgelegt.

Definition Metalle:

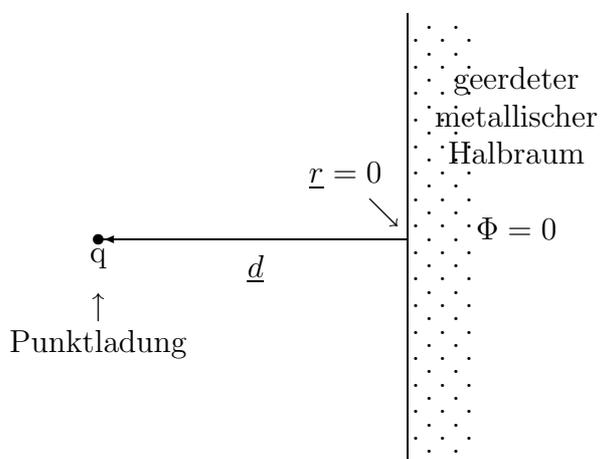
In einem Metall können Ladungen frei verschoben werden!

\implies Das elektrostatische Feld im Inneren eines Metalles verschwindet (im Gleichgewicht).

\implies Deswegen verschwindet auch die Ladungsdichte ρ im Inneren. Wegen $\underline{E} = 4\pi\sigma$ (s.o.) tragen Metalle, die von Feldern umgeben sind, Oberflächenladungen.

2.3.1 Methode der Spiegelladungen

Beispiel:



Die Lösung muß zwei Eigenschaften haben:

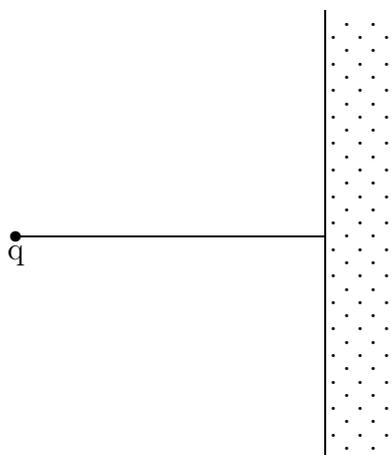
- (a) Um $r = \underline{d}$ ist $\Phi(r) \approx \frac{q}{|r-d|}$
- (b) Für $r \cdot \underline{d} = 0$ gilt $\Phi = 0$ ($\Leftrightarrow \underline{E} \perp$ Oberfläche)

Lösung: Methode der Spiegelladung (oder Bildladung)

$$\Phi(r) = \frac{q}{|r-d|} - \frac{q}{|r+d|} \text{ für } r \cdot \underline{d} > 0$$

$$\implies \underline{E}(r) = q \frac{r-d}{|r-d|^3} - q \frac{r+d}{|r+d|^3}$$

$$\xrightarrow{E=4\pi\sigma} \sigma = -\frac{qd/2\pi}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$



2.3.2 Eindeutigkeit von Lösungen von Randwertproblemen

Voraussetzungen:

In einem gewissen Teilvolumen $V \in \mathbb{R}^3$ sei ρ bekannt; Anstelle der Ladungsdichte im Komplement von V kennen wir "gewisse" Randbedingungen auf dem Rand von V .

Behauptung:

Das elektrostatische Potential Φ ist eindeutig bestimmt (sofern RBen "gewisse" Bedingungen erfüllen).

Beweis:

Annahme: $\exists \Phi_1, \Phi_2$ als Lösung.

Definiere $\tilde{\Phi} := \Phi_1 - \Phi_2$ bzw. $\tilde{E} = -\nabla \tilde{\Phi}$.

Dann gilt in V : $\Delta \tilde{\Phi} = 0$.

Mit $\operatorname{div}(\tilde{\Phi} \tilde{E}) = -\tilde{\Phi} \Delta \tilde{\Phi} - \tilde{E}^2 = -\tilde{E}^2$ folgt dann

$$\implies \int_V \tilde{E}^2 d^3r = \oint_{\partial V} df \tilde{\Phi} E_n$$

\implies wenn $\tilde{\Phi}$ oder \tilde{E}_n auf ∂V verschwinden, ist \tilde{E} überall 0.

Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten für RBen, die auf eine eindeutige Lösung schließen lassen:

1. Vorgabe des Potentials Φ auf dem Rand
(Dirichletsche Randbedingung)
2. Vorgabe des Normalenfeldes \underline{E}_n auf dem Rand
(von-Neumannsche Randbedingungen)

(auch gemischte Randbedingungen sind möglich)

Es gilt also:

Ist im Inneren eines Gebietes die Ladungsdichte und auf dem Rande das Potential oder die Feldnormale gegeben, so ist das Feld im Inneren eindeutig bestimmt.

Wichtig hierbei ist, daß die Randbedingungen für die gesamte Berandung gegeben sind.

Teile des Randes dürfen auch im Unendlichen liegen (dann muß das Potential schnell genug abfallen, wenn diese Teile unendlich große Fläche besitzen).

Obiges Beispiel: Oberfläche $\underline{r} \cdot \underline{d} = 0$ und $\underline{r} \cdot \underline{d} = +\infty$; RBen dort: $\Phi = 0$!

2.3.3 Existenz einer Lösung der Randwertprobleme

Ziel: Formel für eindeutige Lösung (werden sehen, daß wir mit der Bildladung Lösung für beliebige Randwertprobleme im Halbraum gefunden haben).

Zuächst noch eine Hilfsformel für alle beliebigen Skalarfelder φ und ψ :

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi$$

$$\longrightarrow \quad \forall V \subset \mathbb{R}^3 :$$

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) d^3 r' = \oint_{\partial V} (\varphi \operatorname{grad} \psi) df' \quad (2.38)$$

1. Greensche Formel

Nun vertausche man φ und ψ miteinander und subtrahieren

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d^3 r' = \oint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) df \quad (2.39)$$

2. Greensche Formel

wobei $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ = Ableitung in Richtung der Flächennormalen:

$$\nabla \psi \cdot d\mathbf{f} = (\nabla \psi)_n df = \frac{\partial \psi}{\partial n} df$$

Setze nun für φ ein elektrostatisches Potential Φ mit $\Delta \Phi = -4\pi \rho$ ein:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int_V \Phi(\underline{r}') \Delta \psi(\underline{r}') d^3 r' \\ & = -4\pi \int_V \psi(\underline{r}') \rho(\underline{r}') d^3 r' + \oint_{\partial V} \left(\Phi(r') \frac{\partial \psi}{\partial n'} \psi(r') E_n(r') \right) df' \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ähnlich wie bei der Lösung der Poisson-Gleichung, nehmen wir für $\psi(r')$ eine Funktion $G(r, r')$ mit:

$$\Delta G(r, r') = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}') \quad (2.41)$$

Für $r \in V$ folgt:

$$\Phi(\underline{r}) = \int_V G(r, r') \rho(r') d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} \Phi(r') + G(r, r') E_n(r') \right] df'$$

(2.42)

Die Greensfunktion G hat dabei offenbar die Struktur $G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + F(\underline{r}, \underline{r}')$, wobei F mit $\Delta' F(\underline{r}, \underline{r}') = 0$ (Ableitung nach Koordinaten) eine glatte, in V harmonische Funktion ist.

(2.3.3) ist eine Identität, die (für beliebige Funktionen F wie oben) Φ im Inneren von V durch Φ und \underline{E}_n am Rand von V ausdrückt.

(2.3.3) ist noch nicht die Lösung des RWPs, denn Φ und \underline{E}_n dürfen nicht unabhängig vom Rand vorgegeben werden.

(2.3.3) kann durch geeignete Wahl von G bzw. F zur Lösung des RWPs werden: Finden wir z.B. ein $G = G_D$ mit

$$\boxed{G_D(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \text{für } \underline{r}' \in \partial V} \quad (2.43)$$

dann folgt aus (2.3.3)

$$\boxed{\Phi(\underline{r}) = \int_V G_D(\underline{r}, \underline{r}') \rho(\underline{r}') d^3 \underline{r}' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} \Phi(\underline{r}') df'} \quad (2.44)$$

Damit ist das Dirichlet'sche Randwertproblem gelöst. G_D heißt **Greensche Funktion** des betreffenden Randwertproblems.

Offenbar löst man analog mit einer Greenschen Funktion G_N mit $\frac{\partial G_N(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} = 0$ für $\underline{r}' \in \partial V$ das von Neumannsche Randwertproblem (und auch gemischte Randwertprobleme).

Mit Hilfe der Greenschen Funktion ist folgendes erreicht: Bei einem Randwertproblem werden die topologischen Aspekte von den spezifischen Randwerten und der Ladungsdichte ρ (den physikalischen Aspekten) getrennt.

Das allgemeine Randwertproblem wird auf ein spezielles reduziert, dem mit verschwindenden Randbedingungen (2.44) und einer Punktladung im Innern

$$\Delta G(\underline{r}, \underline{r}') = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Betrachte noch einmal das Problem im Halbraum (s.o.)

→ mit Bildladung wird gerade dieses spezielle Problem gelöst.

$$G_D(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}' - \underline{r} + 2(\underline{r}n)n|} \quad (2.45)$$

Offensichtlich erfüllt $\Delta G_D(\underline{r}, \underline{r}') = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')$ für $\underline{r}, \underline{r}' \in V$ und $G_D(\underline{r}, \underline{r}') = 0$ für $\underline{r}' \in \partial V$

Damit löst (2.44) den allgemeinen Fall einer beliebigen Ladungsverteilung im linken Halbraum.

G_D hat immer die Symmetrieeigenschaft $G_D(\underline{r}, \underline{r}') = G_D(\underline{r}', \underline{r})$. (benutze (2.3.3) mit $\varphi = G_D(\underline{r}_1, \underline{r})$ und $\psi = G_D(\underline{r}_2, \underline{r}')$)

Zur Existenz der Lösung von RWPen

Der Beweis der Existenz der Lösung von RWPen allgemeiner Geometrie ist diffizil und mathematisch anspruchsvoll, und die Lösung (d.h. Greensche Funktion) kann i.a. nicht angegeben werden.

Intuitiver Ansatz (Dirichlet):

Ersetze ∂V durch eine geerdete Metalloberfläche ($\Phi = 0$)

\implies Auf ∂V bilden sich Oberflächenladungen, die das Potential um \underline{r} abschirmen.

$$G_D(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \oint_{\partial V} \frac{\sigma(\underline{r}'')}{|\underline{r}' - \underline{r}''|} df'' \quad (2.46)$$

Damit offenbar $\forall \underline{r}' \in V : \Delta G_D(\underline{r}, \underline{r}') = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')$. Um $G_D(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \forall \underline{r}' \in \partial V$ zu erfüllen, muss gelten:

$$\boxed{\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \oint \frac{\sigma(\underline{r}'')}{|\underline{r}' - \underline{r}''|} df'' = 0} \quad (2.47)$$

Existenz von $G_D \iff$ Lösbarkeit dieser Integralgleichung.

2.3.4 Kapazität

Betrachte eine Anordnung von n geladenen Leitern im ladungsfreien Raum. φ_ν sei das Potential des ν -ten Leiters, $V_\nu \in \mathbb{R}^3$ der von ihm beanspruchte Raumbereich, $S_\nu = \partial V_\nu$ dessen Oberfläche.

Sei G_D Greensche Funktion für diese Anordnung:

$$\Phi(\underline{r}) = \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu} \left(-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{\nu}} \frac{\partial G_D(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} df' \right) \quad (2.48)$$

Das elektrische Feld an der Oberfläche der Leiter ($\perp \varphi_n u$) ist daher:

$$E_n = \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{\nu}} \frac{\partial^2 G_D(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'} df'}_{\text{meistens const.}} \quad (2.49)$$

Wegen

$$E_n(\underline{r}) = -4\pi \sigma(\underline{r}) \quad (\sigma(\underline{r}) = \text{Oberflächenladung}).$$

Für die Ladung q_{μ} auf dem μ -ten Leiter erhalten wir also

$$q_{\mu} = \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} \varphi_{\nu} \quad (2.50)$$

$$\text{mit } c_{\mu\nu} = - \iint_{S_{\mu}} \frac{df}{4\pi} \iint_{S_{\nu}} \frac{df'}{4\pi} \frac{\partial^2 G_D(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'}$$

$c_{\nu\nu}$: **Kapazitätskonstante** des ν -ten Leiters

$c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$: **Influenzkoeffizient**

Energie der Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n q_{\mu} \varphi_{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^n c_{\mu\nu} \varphi_{\mu} \varphi_{\nu} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Wegen $U \geq 0$ ist $c_{\nu\mu}$ positiv definit, speziell $c_{\nu\nu} > 0$

2.3.5 Der Kondensator

Definition: Ein Kondensator ist ein System aus 2 Leitern mit $q_1 = -q_2 = Q$.

Umkehrung von (2.50) ergibt:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (C_{22} + C_{12}) \cdot \frac{Q}{\det C} \\ \varphi_1 &= (C_{22} + C_{12}) \cdot \frac{Q}{\det C}\end{aligned}\quad (2.52)$$

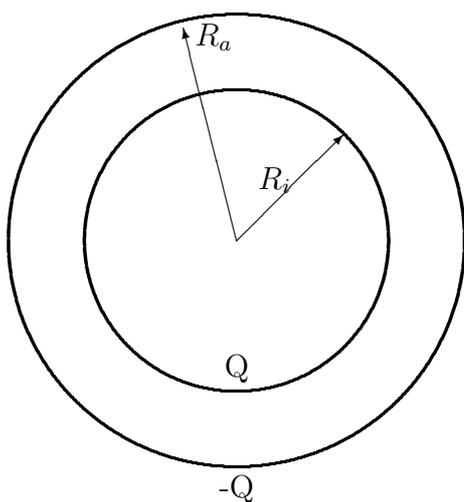
Also:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.53)$$

mit

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} - C_{22} + 2C_{12}}, \text{ außerdem } Q = C(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Bsp: Kugelkondensator



Potential für $R_i < r < R_a$:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{r}$$

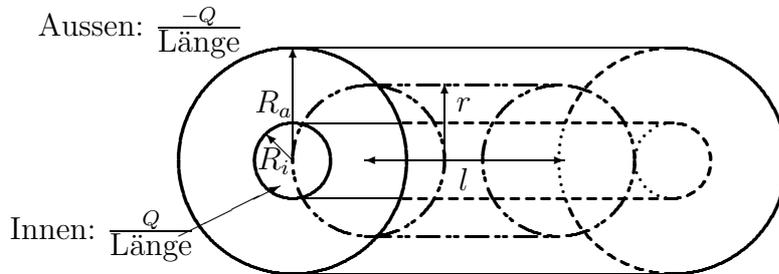
Mit

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Phi(R_i) - \Phi(R_a) = Q \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right)$$

folgt:

Kapazität

$$C = \frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$$

Bsp: Zylinderkondensator

Kapazität: proportional zur Länge (bis auf Randeffekte)

Radiales Feld zwischen den Zylindern:

Kraftflußsatz $\implies 2\pi r l E(r) = 4\pi Q l$ oder $E(r) = \frac{2Q}{r} \implies$ Potential
 $\Phi(r) = -2Q \ln r$

$\Phi(R_i) - \Phi(R_a) = 2Q l \left(\frac{R_a}{R_i} \right) \implies$ Kapazität pro 11Längeneinheit: $C = \frac{1}{2 \ln \frac{R_a}{R_i}}$

Bemerkung zur Bildladungsmethode:

Methode der Bildladungen \rightarrow für viele RWPe anschauliche Lösung. Genau eine Bildladung: nur beim Fall einer Kugel als Rand erfolgreich (Ebene ist Grenzfall davon):

Versuchen Potential Φ im Punkt \underline{r}' durch Bildladung q' im Punkt \underline{b} ($\underline{b} \parallel \underline{r}$) zu finden.

Ansatz:

$$\Phi(\underline{r}') = \frac{q}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \frac{q'}{|\underline{r}' - \underline{b}|}$$

Wähle q' und b so, daß Φ auf Rand der Kugel verschwindet, d.h. $\Phi(r' = a) = 0$

$$\begin{aligned}
\underline{e} &:= \frac{r}{r}, & \underline{e}' &:= \frac{r'}{r'} : \\
\Phi(r' = a) &= \frac{q/a}{|\underline{e}' - \frac{r}{a}\underline{e}|} + \frac{q'/b}{|\frac{a}{b}\underline{e}' - \underline{e}|} \\
&= \frac{q/a}{\sqrt{1 + r^2/a^2 - 2r/a \cos \angle(\underline{e}, \underline{e}')}} \\
&+ \frac{q'/b}{\sqrt{1 + a^2/b^2 - 2a/b \cos \angle(\underline{e}, \underline{e}')}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Für $r/a = a/b$ und $q/a = -q'/b$ erreicht man tatsächlich $\Phi(r' = a) = 0 \quad \forall \underline{e}'$.

Eine Bildladung $q' = -\frac{q}{r}$, bei $b = \frac{a^2}{r}$ löst das Problem! Gilt für r (und r') $> a$ und für r (und r') $< a$

⇒ Greensche Funktion für Kugel :

$$\begin{aligned}
G_D(\underline{r}, \underline{r}') &= \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{a/r}{|\underline{r}' - a^2/r^2 \underline{r}|} \\
&= \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{1}{|(r/a) \underline{r}' - (a/r) \underline{r}|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos \vartheta}} \tag{2.55}
\end{aligned}$$

mit (2.44) können wir damit jedes Problem mit Potentialrandwerten auf der Kugel lösen.

Einige Varianten:

a) Kugel auf vorgegebenem Potential φ_0 .

b) Kugel trägt vorgegebene Ladung q_0 .

→ Lösung: durch weitere Ladung im Kugelzentrum (hier nur $r > a$) ⇒

$$\begin{aligned}
 a) \quad \Phi(\underline{r}') &= \frac{q}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{q \frac{a}{r}}{|\underline{r}' - \frac{a^2}{r^2} \underline{r}|} + \frac{\varphi_0 a}{r'} \\
 b) \quad \Phi(\underline{r}') &= \frac{q}{|\underline{r} - \underline{r}'|} - \frac{q \frac{a}{r}}{|\underline{r}' - \frac{a^2}{r^2} \underline{r}'|} + \frac{q_0 + \frac{a}{r} q}{r^2}
 \end{aligned}$$

Problem: Metallkugel in einem äußeren Feld : SKIZZE!!!!

Lösung: Man erzeugt ein homogenes Feld $E_0 \approx 2q/r^2$ für $q \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$, q/r^2 fest. Rest wie gehabt.

Problem: Kraft auf Ladung q vor geerdeter Fläche \rightarrow verspürt Kraft durch Bildladung. Vor geerdeter Ebene: $F = \frac{q^2}{4d^2}$, vor geerdeter Kugel: $F = \frac{qq'}{|\underline{r}-\underline{b}|} = q^2 \frac{ar}{(r^2-a^2)^2}$.

2.3.6 Separation der Laplace-Gleichung und spezielle Funktionen

Wenn ein Problem nicht in geschlossener Form lösbar \rightarrow Entwicklung der Lösung nach geeigneten Funktionen : Funktionssatz.

Betrachte: Funktionen $U(x)$ auf Intervall $a \leq x \leq b$.

Unvollständige Beschreibung: durch ihre Werte $U(x_\nu)$ an $n+1$ äquidistanten Stellen x_ν . SKIZZE!!!!

$(x_0), (x_1), \dots, (x_n) \in R^{n+1}$ bilden einen $n+1$ -dimensionalen linearen Vektorraum.

Definition: Skalarprodukt: $\langle U, V \rangle_n = \frac{b-a}{n+1} \sum_{\nu=0}^n U(x_\nu) V(x_\nu)$

Vollständige Beschreibung (auch für stetige Fkt.) nur für $n \rightarrow \infty$

$\implies \infty$ -dimensionaler Vektorräume

$$\langle U, V \rangle = \int_a^b U(x) V^*(x) dx$$

(2.56)

Skalarprodukt in Funktionen-Räumen

Das Skalarprodukt erlaubt, wie in endlich-dimensionalen Vektorräumen, die Wahl orthonormierter Basissysteme zur bequemen Darstellung von Funktionen.

Definition: Funktion(folge) $U_n(x)$ ($n=1,2,3,\dots$) bilden ONS (Orthonormalsystem), wenn $\langle U_m, U_n \rangle = \delta_{mn}$

Bsp: Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n x / (b-a)}$ $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ bilden ein ONS.

“Bestmögliche” Approximation einer Fkt. $f(x)$ mittels N Fkt. eines ONS:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^N a_n U_n(x)$$

Forderung: für diese Gleichung soll der mittlere quadratische Abstand kleinstmöglich sein:

$$M_N(\{a_n\}) = \int_a^b dx \left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n U_n(x) \right|^2 dx$$

(2.57)

$$\begin{aligned}
\text{Es ist } M_N(\{a_n\}) &= \int_a^b |f(x)|^2 - \int_a^b dx \sum_{n=0}^N f(x) a_n^* U_n^*(x) \\
&\quad - \int_a^b dx \sum_{n=0}^N f^*(x) a_n U_n(x) + \int_a^b dx \sum_{m,n=0}^N a_n^* a_m U_n^*(x) U_m(x) \\
&= \int_a^b |f(x)|^2 - \underbrace{\sum_{n=0}^N (a_n^* \langle f, U_n \rangle + a_n \langle U_n, f \rangle)}_{\sum_{n=0}^N (a_n - \langle f, U_n \rangle)(a_n^* - \langle U_n, f \rangle) - \langle f, U_n \rangle \langle U_n, f \rangle} + \sum_{n=0}^N a_n a_n^* \\
&= \int_a^b |f(x)|^2 + \sum_{n=0}^N (|a_n - \langle f, U_n \rangle|^2 - |\langle f, U_n \rangle|^2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow M_N$ ist minimal für $\boxed{a_n = \langle f, U_n \rangle}$ (verallgemeinerte Fourierkoeffizienten)

Falls für $N \rightarrow \infty$ $\min M_N \rightarrow 0$ heißt das Funktionensystem vollständig (VONS). Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, U_n \rangle|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Im Sinne von (2.57) gilt dann im Mittel: $\sum_{n=1}^N a_n U_n(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$

Für geeignete $f(x)$ kann auch für alle $x \in [a, b]$ gelten

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(x)}$$

(2.58)

Beispiel für VONS s.o. $e^{2\pi imx/b-a}/\sqrt{b-a}$

Sehen jedoch, daß unter Benutzung von Distributionen die Vollständigkeit eines ONS durch

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) U_n(x') = \delta(x - x') \iff \{U_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ist VONS}} \quad (2.59)$$

ausgedrückt werden kann.

Diese Aussage ist vergleichbar mit der entsprechenden Aussage bei endlich-dimensionalen Vektorräumen ($\{v^i\}$ ist ONS $\iff \sum_{n=1}^N v_n^{(i)} v_n^{(j)} = \delta_{ij}$)

Beweis:

Per Definition gilt:

$$\delta(x - x_i) : \forall f \text{ mit } \int f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x')$$

Das System $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist ein Orthonormalsystem

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x) U_n^*(x') f(x') dx' \\ &= \int_a^b f(x') \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) U_n^*(x') \right) dx' \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) U_n^*(x) &= \delta(x - x') \end{aligned}$$

2.3.7 Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Variablen

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_s) : [a, b] \longrightarrow \text{Gebiet in } R^s$

Falls dieses Gebiet ein Quader Q ist mit $a_i \leq x_i \leq b_i (i = 1 \dots s)$, so kann man aus dem ONS für jede Koordinate $U_n^{(i)}(x)$ ein ONS von Funktionen von s Variablen konstruieren.

$$U_{n_1 \dots n_s}(x_1 \dots x_s) = \prod_{i=1}^s U_{n_i}^{(i)}(x_i) \quad (2.60)$$

Bei $U_{n_1 \dots n_s}(x_1 \dots x_s)$ handelt es sich um ein Orthonormalsystem, weil

$$\int_Q U_{n_1 \dots n_s}(\underline{x}) U_{m_1 \dots m_s}(\underline{x}) dx^s = \prod_{i=1}^s \int_{a_i}^{b_i} U_{n_i}^{(i)}(x_i) U_{m_i}^{(i)}(x_i) dx_i$$

Satz:

Falls die $U^{(i)}$ alle VONS sind, ist auch $U_{n_1 \dots n_s}$ ein VONS.

Beispiel:

Bild eines Quaders mit Nullpunkt in der linken unteren vorderen Ecke und den Kantenlängen L_x , L_y und L_z

Im R^3 ist über einem Quader (s. o.) wie folgt definierte Funktionensystem vollständig:

$$U_{klm}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y L_z}} e^{2\pi i \left(\frac{kx}{L_x} + \frac{ly}{L_y} + \frac{mz}{L_z} \right)}, \quad k, l, m \in Z \quad (2.61)$$

Bei der Konstruktion von (2.60) sollte man nicht zwangsläufig auf quaderförmige Gebiete angewiesen sein, da die x_i auch krummlinige Koordinaten sein können (z.B. Kugel- oder Zylinderkoordinaten)

Kehren wir nun zur Lösung elektrostatischer Probleme zurück:

Wir wollen Lösungen gewisser Probleme nach geeigneten Funktionensätzen entwickeln. Es genügt hierbei Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0$$

zu betrachten (\rightarrow harmonische Funktionen), denn mit

$$F(\underline{r}, \underline{r}') = G(\underline{r}, \underline{r}') - \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

ist die Lösung jedes elektrostatischen Problems gegeben.

Wir suchen also Produktlösungen der Laplace-Gleichung der Form (2.60) zunächst in kartesischen Koordinaten

$$\Phi(x, y, z) = U(x) V(y) W(z)$$

$\Delta\Phi = 0$ wird dadurch zu $\frac{U''}{U} + \frac{V''}{V} + \frac{W''}{W} = 0$

\implies Die Laplace-Gleichung zerfällt in drei gewöhnliche DGLs:

$$\frac{U''}{U} = \text{const} = -\alpha^2 \quad \frac{V''}{V} = \text{const} = -\beta^2$$

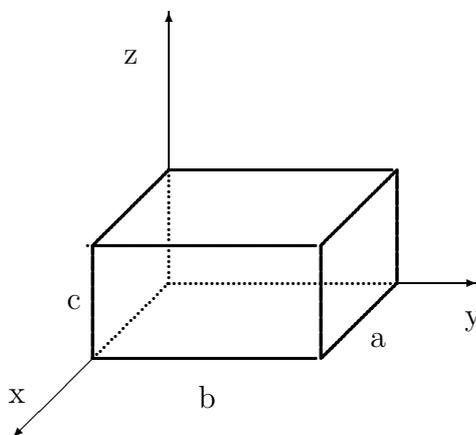
$$\frac{W''}{W} = \text{const} = -\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

\implies Die Laplace-Gleichung kann in kartesischen Koordinaten separiert werden:

$$\Phi = e^{i\alpha x} e^{i\beta y} e^{i\gamma z} \quad \text{mit} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (2.62)$$

Wir wollen nun eine harmonische Funktion in dem Quader $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ mit vorgegebenen Randwerten finden.

unten links



Es genügt, harmonische Funktionen anzugeben, die auf jeweils fünf der sechs Randflächen verschwinden, und auf der sechsten (z. B. $z = c$) vorgegebene Werte $\Phi(x, y)$ annehmen.

Zur Erfüllung der verschiedenen Randbedingungen konstruieren wir aus Gl. (2) die folgende Gleichung (3):

$$\Phi_{mn}(x, y, z) = \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z) \quad (2.63)$$

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{a} \quad \beta_n = \frac{\pi n}{b} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Funktionen $\sin(\alpha_n x)$ bilden in Intervall $[0, a]$ ein vollständiges System, beachte aber den Unterschied zu $e^{\frac{2\pi i n x}{a}}$.

Es folgt, dass (3) ein vollständiges System harmonischer Funktionen darstellt, das die Randbedingungen an fünf Flächen erfüllt. Das gewünschte Potential in Innern des Quaders ist also

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{mn}(x, y, z). \quad (2.64)$$

Die verbleibende Randbedingung fordert nun

$$\Phi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \Phi_{mn}(x, y, c) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sinh(\sqrt{a_m^2 + b_n^2} c) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y).$$

Wegen der Orthonormierungsrelation $\int_0^a \sin(\alpha_k x) \sin(\alpha_l x) dx = \frac{1}{2} \delta_{kl}$ folgt sofort:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c)} \int_0^a \int_0^b \Phi(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy \quad (2.65)$$

Definition

$$\Phi_{mn} := A_{mn} \sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \Phi(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy$$

Die Güte der Konvergenz der Fourierreihe für $\Phi(x, y)$ hängt ausschließlich von $\Phi(x, y)$ ab:

Die Lösung für $\Phi(I)$ konvergiert für $z < c$ um den Faktor $\frac{\sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z)}{\sinh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} c)}$ besser.

2.3.8 Nützlichkeit der Lösungsreihe für I

Berechne Φ im Mittelpunkt eines Würfels ($a = b = c$):

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \Phi_{mn} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m^2 + n^2}\right)}{\sinh(\pi \sqrt{m^2 + n^2})} \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} (-1)^{k+l} \frac{\Phi_{2l+1,2k+1}}{2 \cosh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{(2l+1)^2 + (2k+1)^2}\right)}\end{aligned}$$

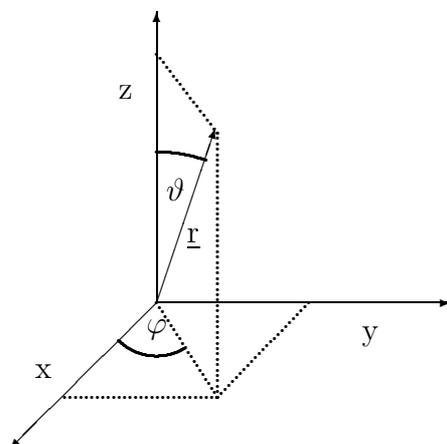
Die ersten vier Terme ($k, l = 0, 1$) liefern im allgemeinen bereits eine Genauigkeit von 0,1% (!)

Ebensogut konvergiert diese Reihe z. B. für die induzierte Ladungsdichte in der metallischen Fläche $z = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) &= \frac{1}{4\pi} E_n \Big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \Phi \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \cosh(\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} z) \Big|_{z=0} \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2}\end{aligned}$$

2.3.9 Die Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Die Laplace-Gleichung kann auch in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) separiert werden.



Sie lautet dann

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Wir suchen nun nach Produktlösungen der Form

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\cos(\vartheta)) Q(\varphi)$$

Durch Einsetzen ($x := \cos(\vartheta) \rightarrow \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial x}$) folgt dann:

$$x^2(1-x^2) \left\{ \frac{U''}{U} + \frac{1}{r^2} \frac{\frac{d}{dx}[(1-x^2)P']}{P} \right\} + \frac{Q''}{Q} =$$

Nur $\frac{Q''}{Q}$ hängt von φ ab $\implies \frac{Q''}{Q} = \text{const} =: -m^2$ bzw.

$$\boxed{Q(\varphi) = e^{\pm im\varphi}}$$

Falls φ nicht eingeschränkt auf einem Intervall $< 2\pi$, muss m ganzzahlig sein, damit φ eindeutig in R^3 wird.

$$\Rightarrow r^2 \frac{U''}{U} + \frac{\frac{d}{dx}((1-x^2)P')}{P} - \frac{m^2}{1-x^2} = 0$$

Nur $r^2 \frac{U''}{U}$ hängt von r ab

$$\Rightarrow r^2 \frac{U''}{U} = \text{const} \text{ bzw. } \boxed{U(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}}$$

\Rightarrow Es bleibt die Legendre Differentialgleichung (L-DGL):

$$\boxed{(1-x^2)P' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) \cdot P = 0} \quad (2.66)$$

Für festes l , m gibt es zwei linear unabhängige Lösungen

Theorie der linearen DGL \Rightarrow 2 Lösungen sind regulär (d.h. analytisch) bis auf möglicherweise $x = \pm 1$ (singuläre Punkte)

Falls $\vartheta \in [0; \pi]$ d.h. $x \in [-1; 1]$ und φ regulär auf der Polarachse $x = \pm 1$

\rightarrow wir brauchen die Lösung der LDGL, die für $x = \pm 1$ endlich sind.

Man kann zeigen:

$$\begin{aligned} \text{Für } l &= 0, 1, 2, \dots \quad (\text{später: Drehimpuls}) \\ \text{und } m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (\text{später: z-Komponente}) \end{aligned}$$

existiert genau eine Lösung (bis auf konstante Faktoren), die bei $x = \pm 1$ endlich ist, nämlich:

Legendre-Funktion (LF)

$$\boxed{P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)} \quad (2.67)$$

P_l^m und P_l^{-m} sind linear unabhängig und es gilt: $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-1)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$

Für festes m sind die P_l^m ($l = |m|, |m+1|, \dots$) paarweise orthogonal, denn mit LDGL ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^1 dx P_{l'}^m \left\{ \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right) + l(l+1)P_l^m - \frac{m^2 P_l^m}{1-x^2} \right\} \\
&\stackrel{\text{partielle Int.}}{=} \int_{-1}^1 dx (x^2-1) \frac{dP_{l'}^m}{dx} \frac{dP_l^m}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_{l'}^m P_l^m
\end{aligned}$$

Nun vertauscht man l und l' und subtrahiert die beiden Gleichungen

$$\Rightarrow (l(l+1) - l'(l'+1)) \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_{l'}^m(x) P_l^m(x)}_{\Rightarrow 0 \text{ f\u00fcr } l \neq l'} = 0$$

Berechnet man die Norm $\int_{-1}^1 dx (P_l^m(x))^2$ selbst, erh\u00e4lt man

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}^m P_l^m = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'}$$

Der Satz separierter Funktionen der Laplace-Gleichung lautet nun:

$$\boxed{\Phi_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = (A r^l + B r^{-l-1}) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}} \quad (2.68)$$

Der zugeh\u00f6rige Winkelanteil lautet: **Kugelfl\u00e4chenfunktion KFF** (=spherical harmonics)

$$\boxed{Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}}_{\text{Normierungsfaktor}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}} \quad (2.69)$$

z.B.:

$$\begin{aligned} Y_{00}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ Y_{11}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta \cdot e^{i\varphi} \\ Y_{10}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \\ &\vdots \end{aligned}$$

KFF sind auf der Kugeloberfläche orthonormiert:

$$\delta_{mm'} \delta_{ll'} = \oint_{\partial K_1(0)} d\Omega Y_{l'm'}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.70)$$

Man kann zeigen, dass die $P_l^m(x)$ für jedes feste m ein VONS auf $[-1,1]$ bilden. Da $\{e^{i\varphi}\}$ ebenfalls VONS auf $[0, 2\pi]$ ist, folgt:

$$\boxed{\{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\} \text{ ist VONS auf der Kugeloberfläche}} \quad (2.71)$$

→ Die allgemeine Lösung von $\Delta\Phi = 0$ in Kugelkoordinaten lautet daher:

$$\boxed{\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)} \quad (2.72)$$

bei Problemen, die rotationssymmetrisch um die Polarachse sind, also nicht von φ abhängen, tragen nur Terme $m = 0$ bei:

$$\boxed{P_l(x) := P_0^l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l} \quad (2.73)$$

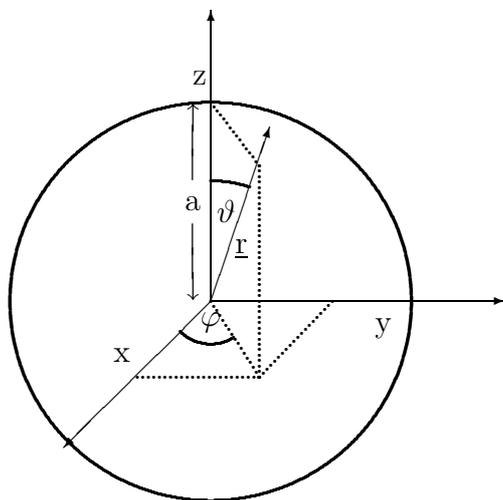
heißen **Legendre-Polynome (LP)**

Speziell sollte man sich merken:

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2} \\
 \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) &= \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \\
 P_l(1) &= 1 \\
 \text{Rekursionsformel: } (l+1) P_{l+1}(x) &= (2l+1)x P_l(x) - l P_{l-1}(x)
 \end{aligned}$$

2.3.10 Einfache Anwendung

Berechne das Potential einer ungeladenen Metallkugel im vorgegebenen homogenen elektrischen Feld \underline{E}_0



Lösung erfüllt für $r > a$ die Bedingung $\Delta\Phi = 0$, ist für $r = a$ konstant Null

und soll sich für $r \rightarrow \infty$ wie $\Phi = -z E_0 = -r E_0 \cos \vartheta$ verhalten.

Mit $\Phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta)$ folgt:

(a) $A_1 = -E_0, A_l = 0$ für $l > 1$ (b) $B_l = 0$ für $l > 1$

$$\begin{aligned} A_1 a + \frac{B_1}{a^2} &= 0 \\ B_1 &= a^3 E_0, B_0 = 0 \\ \Rightarrow \Phi(r, \vartheta) &= \left(\frac{a^3}{r^2} - r \right) E_0 \cos \vartheta = \underline{E_0} \left(\frac{a^3}{r^3} \underline{r} - \underline{r} \right) \end{aligned}$$

Das induzierte Dipolmoment ist $\underline{p} = a^3 \underline{E_0}$ (z.B. mit Spiegelladungen $|\underline{p}| = \frac{Qa}{R} \cdot \frac{2a^2}{R} = a^3 E_0$)

Für eine geladene Kugel wird B_0 gleich der Ladung.

Zylinderkoordinaten sind ein drittes wichtiges System, in dem die Laplace-Gleichung separiert. Im Koordinatensystem (ρ, φ, z) lautet die Laplace-Gleichung $\Delta \Phi = 0$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0} \quad (2.74)$$

Mit dem Separationssatz

$$\boxed{\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) Q(\varphi) U(z)} \quad (2.75)$$

folgt

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) / R + \frac{1}{\rho^2} Q'' / Q + U'' / U = 0$$

also wie gehabt:

$$U''/U = k^2 \text{ oder } U(z) = e^{+kz}$$

Weiter folgt $Q''/Q = -\nu^2$ oder $Q(\varphi) = e^{+i\nu\varphi}$, wobei ν ganz, wenn Φ auf $[0, 2\pi]$ stetig!

Es bleibt die Besselsche DGL:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (2.76)$$

B-DGLa

Parameter k läßt sich trivial eliminieren: Subst. $x = k\rho$

⇒ Standardform der Besselschen DGL

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR}{dx} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad (2.77)$$

B-DGL

Diese B-DGL hat den "singulären Punkt" $x = 0$, alle Lösungen sind analytisch, bis auf höchstens $x = 0$. Die Lösungen heißen Zylinderfunktionen. Eine spezielle Lösung ist die Besselfunktion:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{z} \right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2j} \quad (2.78)$$

BF

mit

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} dy y^x e^{-y} \\ \Gamma(n+1) &= n!\end{aligned}$$

$J_\nu(x)$ und $J_\nu(-x)$ sind eine Basis von Lösungen der B-DGL, falls ν nicht ganzzahlig ist. Für uns ist aber der Fall ganzer ν interessant:

$\nu = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (2.79)$$

und $J_n(x)$ sind die einzigen bei $x = 0$ regulären Lösungen von B-DGL. (Beachte: $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \geq 0$ und $\Gamma(n) = \infty$ für $n \leq 0$)

Eine zweite Lösung für $\nu = m$ kann man durch die Neumannfunktionen

$$N_\nu(x) = (J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)) / \sin(\pi\nu) \quad (2.80)$$

Neumann - Funktion (NF)

N_ν ist Lösung von B-DGL, und für $\nu \rightarrow m$ (ganz) ist $N_m(x)$ unabhängig von $J_m(x)$ und verhält sich bei $x = 0$ wie

$$N_\nu(x) = x^{-m} (m > 0), N_0(x) \sim \ln(x) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

\Rightarrow Allgemeine Lösung unseres Separationsansatzes:

$$\Phi_{k,\nu}(\rho, \varphi, z) = (AJ_\nu(k\rho) + BN_\nu(k\rho))e^{\pm i\nu\varphi}e^{\pm kz} \quad (2.81)$$

ZB

vgl. Kugel-Koordinaten: $\Phi_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = (\tilde{A}r^l + \tilde{B}r^{-l-1})Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

Bemerkung: Hankelfunktion $H_\nu^{1/2}(x) = J_\nu(x) \pm iN_\nu(x)$ auch wichtige Basis z.B. von Zylinderfunktion.

Bemerkung: Nullstellen der Besselfunktion:
für $x \rightarrow \infty$ gilt:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2\nu + 1)\right)$$

$\leadsto J_\nu$ hat unendlich viele Nullstellen.

Nehme n -te positive Nullstelle:

$$x_{\nu n} \Rightarrow \int_0^a \rho J_\nu(x_\nu(x_{\nu n} - \frac{\rho}{a})) J_\nu(x_{\nu n} - \frac{\rho}{a}) d\rho = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu n}) \delta_{nm} \quad (2.82)$$

Beispiel:

Betrachte harmonische Funktion, deren Werte auf Zylinderoberfläche gegeben sind. Zerlege Problem wie beim Quader:

1. Teilproblem: Randwert Null auf dem Zylindermantel, außer auf kreisförmigen Deckel

In ZB muß

- (a) $\nu = m$ ganz
- (b) $B = 0$ damit Φ für $\rho = 0$ regulär
- (c) $J_m(ka) = 0$, damit $\Phi = 0$ für $\rho = a$
 $\rightarrow k \cdot a = x_{mn}$ oder $k = k_{mn} = x_{mn}/a$ wobei x_{mn} die n -te Nullstelle von $J_m(x)$ ist!

\Rightarrow Lösung darstellbar als

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(k_{mn}\rho) e^{im\varphi} \sinh(k_{mn}z) \quad (2.83)$$

[setzt Vollständigkeit der $\{J_m(k_{mn}\rho)\}_{n=1}^{\infty}$ für jedes m voraus, ist aber gegeben. "Fourier-Bessel-Entwicklung".]

Orthogonalitätsfunktion (3.104): $\Phi(\rho, \varphi, L) = V(\rho, \varphi)$

$$\Rightarrow A_{mn} = [\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn}) \sinh(k_{mn}L)]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \underbrace{\rho v(\rho, \varphi)}_{\Phi(\rho, \varphi, L)} \cdot J_m(k_{mn}\rho) e^{-im\varphi}$$

2. Teilproblem:

Randwert Null auf Boden und Deckel des Zylinders
i.e. $\Phi = 0$ für $z = 0$ und $z = L \Rightarrow k$ muß imaginär
sein!

\leadsto Bilde aus $e^{\pm kz}$ die Linear-Kombination $\sin(|k|z)$ & $k_n = \frac{i\pi n}{L}$

\Rightarrow Lösung darstellbar als

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} I_m\left(\frac{\pi n \rho}{L}\right) e^{im\varphi} \sin\left(\frac{\pi n z}{L}\right)$$

Hierbei $I_\nu(x) = (-1)^\nu J(ix)$ "modifizierte Besselfunktion"

Bestimmung der Koeffizienten ($\Phi(a, \varphi, z) = w(\varphi, z)$)

$$A_{mn} = \left[\pi I_m\left(\frac{\pi n a}{L}\right) \right]^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz w(\varphi, z) e^{-im\varphi} \sin\left(\frac{\pi n z}{L}\right)$$

Außer den drei hier betrachteten Ko-Systemen erlauben einige wenige andere die Separation der Laplace-Gleichung; diese anderen sind jeweils von weniger großer Bedeutung.

2.4 Multipolentwicklung

Wie sieht das Potential einer lokalisierten Ladungsverteilung in größerem Abstand aus?

Betrachte Ladungen nur innerhalb einer Kugel $r' \leq a$

\Rightarrow zugehöriges Potential harmonisch für $r > a \Rightarrow$ In Kugelkoordinaten darstellbar als Reihe

$$\Phi(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} \quad (2.84)$$

mit q_{lm} Multipolmomente: (MM)

- $l = 0$: Monopol-
- $l = 1$: Dipol-
- $l = 2$: Quadropol-
- $l = 3$: Oktopol-Terme

Beachte: q_{lm} hängen ab von (1) Wahl des Ursprungs
(2) Wahl der Polarachse und -ebene

Erste Aufgabe: Drücke MM'e durch Ladungsdichte aus:

$$\Phi(\underline{r}) = \int_{r' < a} d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}' - \underline{r}|} \quad (2.85)$$

Es genügt wegen 2.85 die für $r > a > r'$ sowohl in \underline{r} wie in \underline{r}' harmonische Funktion $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$ zu entwickeln.

Beh.: $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$ mit $\gamma = \angle(\underline{r}, \underline{r}')$

Beweis: Drücke \underline{r} in Kugelkoordinaten aus (r, ϑ, φ) , Polarachse $\parallel \underline{r}' \Rightarrow \gamma = \vartheta$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \vartheta)$$

nur $m = 0$ -Term in Entwicklung nach KFF

Zur Bestimmung der B_l lege \underline{r} auf die Polarachse $\Rightarrow \vartheta = 0$ und mit $P_l(1) = 1$ folgt:

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{\underline{r} - \underline{r}'} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \stackrel{!}{=} \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} \Rightarrow B_l = r'^l$$

Betrachten nun das Additionstheorem für Kugelfunktionen (AK)

$$P(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.86)$$

mit $\gamma = \angle(\Omega(\varphi, \vartheta), \Omega(\varphi', \vartheta'))$

Ableitungsskizze:

$$\frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \text{ harmonisch in } \underline{r}' \text{ und } \underline{r} \text{ für } r' < a < r$$

$$\frac{r'^l}{r^{l+1}} \sum_{m'=-l}^l \sum_{m=-l}^l a_{mm'} Y_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

zweifache Entwicklung in KFF (für \underline{r} und \underline{r}') wegen vorgegebener r -Abhängigkeit nur jeweils ein l -Summand. γ hängt nur von $\varphi - \varphi'$ ab $\Rightarrow m = -m'$

$$\frac{r'^l}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l a_m Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Bestimmung der a_m führt auf AK

Nun:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\underline{r}) &= \int_{r' \leq a} \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}' - \underline{r}|} d^3 r' = \int_{r' \leq a} d^3 r' \rho(\underline{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \\
 &= \int_{r' \leq a} d^3 r' \rho(\underline{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}} \cdot \underbrace{\int_{r' \leq a} d^3 r' \rho(\underline{r}') r'^l Y_{lm}(\vartheta', \varphi')}_{=q_{lm} \text{ durch VGL mit (2.84)}} \\
 &\Rightarrow \boxed{q_{lm} = \int_{r' \leq a} d^3 r' \rho(\underline{r}') r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')} \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

sphärische Multipolmomente (SMM)

Multipolmomente sind physikalische Größen mit Koordinatenunabhängiger Bedeutung. Die $2l+1$ Koeffizienten des l -ten Moments hängen jedoch vom Koordinatensystem ab.

→Bei Drehung : Trafo in komplizierter Weise

Einfacher transformieren sich die kartesischen Komponenten der Multipolmomente.

Die Funktionen $Q_{lm}(\underline{r}) := Y_{lm}(\vartheta, \varphi) r^l$ sind homogene Funktionen vom Grad l in x, y, z , d.h. $Q_{lm}(\lambda \underline{r}) = \lambda^l Q_{lm}(\underline{r})$!

Aufgrund der Definition der Legendre-Funktionen, die in $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ in (2.3.9) auftauchen, folgt:

$Q_{lm}(\underline{r})$ sind Polynome in x, y, z → harmonische Polynome vom Grad l

⇒ Es gibt genau $2l+1$ linear unabhängige homogene Polynome vom Grad l , die eine Basis bilden:

$$Q_{lm}(x, y, z) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi) r^l \quad (2.88)$$

Man kann sich dies auch direkt klarmachen: Das allgemeine Polynom vom Grad l ist

$$Q_l(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = l} C_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

Es hat $(l+1)(l+2)/2$ Koeffizienten (wegen $\sum_{n=1}^{l+1} n = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$). Diese Polynome sind natürlich nicht alle harmonisch. Offenbar gilt

$$\Delta Q_l = Q_{l-2}$$

wobei Q_{l-2} ein beliebiges Polynom vom Grade $l-2$ ist. Q_l ist harmonisch genau dann, wenn $Q_{l-2} = 0$ ist, was $l(l-1)/2$ Bedingungen liefert. \Rightarrow Es bleiben $(l+2)(l+1)/2 - l(l-1)/2 = 2l+1$ freie Parameter für Q_l .

Angewendet auf (2.87) bedeutet (2.88), daß die sphärischen Multipolmomente q_l gewisse Linearkombinationen der kartesischen Multipolmomente ($\alpha + \beta + \gamma = l$) sind:

$$\tilde{Q}_{\alpha\beta\gamma}^{(l)} := \int d^3r x^\alpha y^\beta z^\gamma \rho(\underline{r})$$

Die $\tilde{Q}_{\alpha\beta\gamma}^{(l)}$ sind dabei als die $(l+2)(l+1)/2$ verschiedenen Komponenten des kartesischen Momententensors ($\nu_i = 1, 2, 3$)

$$Q_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l}^{(l)} = \int d^3r x_{\nu_1} x_{\nu_2} \cdots x_{\nu_l} \rho(\underline{r})$$

anzusehen. Hier: $x = x_1, y = x_2, z = x_3$. Der Tensor $Q^{(l)}$ ist totalsymmetrisch und vom Rang l .

Bsp.:

$$Q_{1122}^{(4)} = \int d^3r x^2 y^2 \rho(\underline{r}) = \tilde{Q}_{220}^{(4)}$$

Bemerkung:

Wegen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) r^{-l-1} = Q_{lm}(x, y, z) / r^{2l+1}$ kann man auch (2.84) in den harmonischen Polynomen schreiben.

In der Praxis sind nur die ersten drei Multipolmomente besonders wichtig. Wir können sie aus obigen Ergebnissen ablesen, wollen sie aber noch einmal direkt herleiten. Dazu entwickeln wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2(\underline{r} \underline{r}') + r'^2}} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\underline{r} \underline{r}'}{r^3} + \frac{3(\underline{r} \underline{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \cdots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \sum_{\nu=1}^3 x_{\nu} x'_{\nu} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\nu, \mu} x_{\nu} x_{\mu} (3x'_{\nu} x'_{\mu} - r'^2 \delta_{\mu\nu}) + \cdots \end{aligned}$$

Einsetzen in $\Phi(\underline{r}) = \int d^3r' \rho(r') / |\underline{r} - \underline{r}'|$ ergibt:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{q}{r} + \frac{1}{r^3} \sum_{\nu} p_{\nu} x_{\nu} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\nu, \mu} Q_{\nu, \mu} x_{\nu} x_{\mu} + \cdots \quad (2.89)$$

Hierbei ist

$$q = \int d^3 r' \rho(\underline{r}') \quad \underline{\text{die Gesamtladung}}$$

$$p_\nu = \int d^3 r' x'_\nu \rho(\underline{r}') \quad \underline{\text{die Komponenten des Dipolmomentes } p}$$

$$Q_{\mu\nu} = \int d^3 r' (3x'_\mu x'_\nu - \delta_{\mu\nu} r'^2) \rho(r'^2) \quad \underline{\text{die Komponenten des Quadrupoltensors}}$$

Bsp.:

$$Q_{12} = \int d^3 r' 3xy\rho(\underline{r}'), \quad Q_{33} = \int d^3 r' (2z^2 - y^2 - x^2)\rho(\underline{r}')$$

$\underline{\underline{Q}}$ hat als spurfreier (d.h. $\sum_{\nu=1}^3 Q_{m\nu\nu} = 0$), symmetrischer (d.h. $Q_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$) Tensor 2-ter Stufe tatsächlich wie q_2 fünf Komponenten.

$\underline{\underline{Q}}$ kann auf Hauptachsen transformiert werden, durch Drehung des Koordinatensystems. Wichtig ist der Fall rotationssymmetrischer Ladungsverteilung: Ist die z -Achse die Symmetrieachse, so gilt offenbar $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}$

→ $\underline{\underline{Q}}$ kann durch das Quadrupolmoment

$$q = Q_{33} = \int d^3 r (2z^2 - y^2 - x^2)\rho(\underline{r})$$

charakterisiert werden.

Wenn wir den Aufpunkt um \underline{r}_0 verschieben, ändern sich i.a. die Multipolmomente.

Wir wollen jetzt $\Phi(\underline{r}') = \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$ nach negativen Potenzen von $|\underline{r} - \underline{r}_0|$ entwickeln.

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{r}) &= \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}_0 - (\underline{r}' - \underline{r}_0)|} \\ &= \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}' + \underline{r}_0)}{|\underline{r} - \underline{r}_0 - \underline{r}'|} \\ &\Rightarrow \text{neue Multipolmomente } q_{lm}^{\underline{r}_0} = \int d^3 r' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') r'^l \rho(\underline{r}' + \underline{r}_0) \end{aligned}$$

Bekanntlich ist das Monopolmoment, d.h. die Gesamtladung, unabhängig vom Aufpunkt. Die Verallgemeinerung dieser Beobachtung lautet:

Das erste nicht verschwindende Multipolmoment hängt nicht vom Aufpunkt ab.

Wenn die ersten $(l - 1)$ Multipolmomente bezüglich eines Aufpunktes verschwinden, so verschwinden sie bezüglich jeden Aufpunktes.

Dann ist $\Phi(\underline{r}) \sim r^{-l} \implies \Phi(\underline{r})$ muss auch wie $|r - r_0|^{-l}$ zerfallen für $r \rightarrow \infty$

Die Aufpunktunabhängigkeit des l -ten Multipolmomentes folgt leicht aus einer Entwicklung wie bei (2.89).

Höhere Multipolmomente hängen sehr wohl vom Aufpunkt ab:

Bsp.:

Ist die Gesamtladung q eines Systems $(= \int \rho(r') d^3 r') \neq \text{Null}$, so ist es zunächst sinnlos nach dem Dipolmoment \underline{p} der Anordnung zu fragen, denn

- \underline{p} hängt vom Aufpunkt ab und
- bzgl. des Ladungsmittelpunktes $\underline{R} = \frac{\int \rho(r') \underline{r} d^3 r'}{Q}$ ist $\underline{p} = 0$.

Nach dem Quadrupolmoment zu fragen ist sinnvoll: man meint dann das Quadrupolmoment bzgl. \underline{R} (z.B. bei Ionen, Elektronen, Protonen, Atomkerne).

Ist die Ladung $q = 0$, so hängt \underline{p} nicht vom Aufpunkt ab (Atome, Neutronen).

Die Multipolmomente bestimmen nicht nur das elektrische Feld einer lokalisierten Ladungsverteilung in großem Abstand, sondern auch die Energie einer solchen Verteilung im äußeren Feld.

Sei $\Phi(\underline{r})$ durch externe Ladungen ρ_{ext} erzeugt. Dann hat die Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ in diesem Potential die Energie

$$W = \int \Phi(\underline{r}) \rho(\underline{r}) d^3 r \quad \left(\text{wie zuvor, jedoch ohne } \frac{1}{2} \right)$$

Falls $\Phi(\underline{r})$ über $\rho(\underline{r})$ langsam variiert, ist es zweckmäßig, Φ um einen Punkt \underline{r}_0 in der Nähe von $\rho(\underline{r})$ zu entwickeln (z.B. Ladungsmittelpunkt):

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{r}) &= \Phi(\underline{r}_0) + (\underline{r} - \underline{r}_0) \nabla \Phi(\underline{r}_0) + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} (x_\nu - x_{0\nu})(x_\mu - x_{0\mu}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\nu \partial x_\mu} + \dots \\ &= \Phi(\underline{r}_0) - (\underline{r} - \underline{r}_0) \underline{E} - \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} (x_\nu - x_{0\nu})(x_\mu - x_{0\mu}) \left. \frac{\partial E}{\partial x_\nu} \right|_{\underline{r}_0}\end{aligned}$$

Falls $\rho_{ext}(\underline{r}) = 0$ um $\underline{r} + \underline{r}_0 \implies \operatorname{div}(\underline{E}) = 0$ um \underline{r}_0 und wir können den verschwindenden Beitrag $\frac{1}{6} \sum_{\mu, \nu} (\underline{r} - \underline{r}_0)^2 \delta_{\mu\nu} \left. \frac{\partial E}{\partial x_\nu} \right|_{\underline{r}_0}$ ergänzen.

Einsetzen in W liefert dann:

$$W = q\Phi(\underline{r}_0) - \underline{p}^{(\underline{r}_0)} \underline{E}(\underline{r}_0) - \frac{1}{6} \sum_{\mu, \nu} Q_{\mu\nu}^{(\underline{r}_0)} \left. \frac{\partial E_\mu}{\partial x_\nu} \right|_{\underline{r}_0} + \dots$$

Mit dieser Beziehung erhält man also Auskunft über Kräfte und Drehmomente, die auf eine Ladungsverteilung ρ (z.B. Atomkerne, Atome) wirken.

Kraft: Es gilt: $\underline{F} = -\operatorname{grad}_{\underline{r}_0}(W)$.

\implies

$$\begin{aligned}q \neq 0 : \underline{F} &= q \underline{E}(\underline{r}_0) + \dots \\ q = 0 : \underline{F} &= \operatorname{grad}_{\underline{r}_0}(\underline{p} \cdot \underline{E}(\underline{r}_0)) + \dots = (\underline{p} \cdot \nabla) \underline{E} \Big|_{\underline{r}_0}\end{aligned}$$

Bei einer Drehung um \underline{r}_0 ändert sich W ebenfalls. $\implies \underline{E}$ übt ein Drehmoment auf die Ladungsdichte aus. Drehen wir eine (starre!) Ladungsanordnung um einen Winkel ϵ um die z -Achse, dann geht die Energie über in

$$W(\epsilon) = q\Phi(\underline{r}_0) - \sum_{\mu, \nu} E_\mu D_{\mu\nu}(\epsilon) p_\nu - \frac{1}{6} \sum_{\kappa, \xi, \mu, \nu} \frac{\partial E_\kappa}{\partial x_\xi} D_{\kappa\mu}(\epsilon) D_{\xi\nu}(\epsilon) Q_{\mu\nu} + \dots$$

Dabei ist \underline{D} eine Drehmatrix, für die gilt:

$$D_{\mu\nu}(\epsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) & 0 \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Drehmoment $N_z = \left. \frac{dW}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$ ergibt sich wegen

$$-\left. \frac{dD}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu

$$N_z = E_y p_x - E_x p_y + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} Q_{yy} - \frac{\partial E_y}{\partial x} Q_{xy} - \frac{\partial E_x}{\partial y} Q_{yx} + \frac{\partial E_y}{\partial y} Q_{xx} \right) + \dots$$

Also

$$\boxed{\underline{N} = \underline{p} \times \underline{E}(\underline{r}_0) + \dots}$$

Kapitel 3

Die Maxwellgleichungen

3.1 Magnetostatik

Nachdem die wichtigsten mathematischen Voraussetzungen anhand der Elektrostatik entwickelt sind, können wir nunmehr zügig die Maxwellgleichungen in ihrer Gesamtheit besprechen. In diesem Abschnitt entwickeln wir die Magnetostatik analog zur Elektrostatik.

Es gibt zunächst einmal keine freien magnetischen Ladungen. \implies Die Entwicklung der Gesetze der Magnetostatik war mühsamer als die der Elektrostatik. Eine elementare Erfahrung aus dem Bereich der Magnetostatik ist die folgende: ein magnetischer Dipol mit Moment \underline{m} im Feld der magnetischen Induktion (oder Flußdichte bzw. Feldstärke) \underline{B} erfährt ein Drehmoment

$$\underline{N} = \underline{m} \times \underline{B} \quad (3.1)$$

Das Moment \underline{m} wird mit Hilfe des Feldes \underline{B} , das es selbst erzeugt, definiert. Erst der Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld und dem elektrischen Strom brachte tiefere Einsichten.

Die elektrische Stromdichte $J(\underline{r})$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung mit La-

dungsdichte $\rho(\underline{r})$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\underline{J}) = 0 \quad (3.2)$$

bzw. in integrierter Form

$$\dot{Q} + \oiint \underline{J} \cdot \underline{n} \, df = 0 \quad (3.3)$$

\iff Ladungserhaltung

In der Magnetostatik dürfen (stationäre) Ströme keine Ladung anhäufen

$$\implies \operatorname{div}(\underline{J}) = 0 \text{ in der Magnetostatik} \quad (3.4)$$

Die beobachtbare Kraftwirkung von Strömen (d.h. stromdurchflossenen Leitern) aufeinander, definiert man analog zur Elektrostatik über ein Magnetfeld mit der Induktion \underline{B} . Der Gleichung $\underline{F} = q \underline{E}$ entspricht dabei die Lorentzkraft auf eine (bewegte) Ladung q :

$$\underline{F} = q (\underline{v}/c) \times \underline{B} \quad (3.5)$$

und der Gleichung $\underline{E} = \int d^3r' \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$ entspricht das Gesetz von Biot-Savart

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 \underline{r}' J(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad (3.6)$$

Bemerkung: Die Zerlegung in einzelne Stromelemente ergibt eine Gleichung analog zu $\underline{E}(\underline{r}) = \sum q_\nu \frac{\underline{r} - \underline{r}_\nu}{|\underline{r} - \underline{r}_\nu|^3}$. Sie ist aber fiktiv, da es keine stationären Stromelemente gibt.

Die Ähnlichkeiten zwischen Elektro- und Magnetostatik sind hier bereits unverkennbar. Letztere hat lediglich eine schwierigere, vektorielle Struktur der Gleichung.

Aus Gleichung (3.6) liest man sofort ab:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot} \underline{A}(\underline{r}) \quad (3.7)$$

mit einem Vektorpotential (wegen $\text{div} \underline{J} = 0$)

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 \underline{r}' \frac{J(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (3.8)$$

DGL für \underline{B} sind nun leicht ableitbar: Aus (3.7) folgt

$$\text{div} \underline{B} = 0 \quad (3.9)$$

Mit

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A} \text{ ergibt sich}$$

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \frac{1}{c} \nabla \int d^3 r' \underline{J}(\underline{r}') \cdot \underbrace{\nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{=-\nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}} - \frac{1}{c} \int d^3 r' \underline{J}(\underline{r}') \underbrace{\Delta \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\underline{r} - \underline{r}')}$$

\Rightarrow

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}(\underline{r}) \quad (3.10)$$

Man beachte, daß (3.10) \Rightarrow (3.4), so daß (3.10) nur für Magneto-Statik gültig sein kann!

Ampèresches Gesetz: folgt aus (3.10) durch Bildung des Flusses durch eine orientierte Fläche F und Stokesschem Integralsatz:

$$\oint_L \underline{B} \cdot d\underline{r} = \frac{4\pi}{c} I_L \quad (3.11)$$

Aus obigen Gleichungen folgt Existenzsatz, der im Kapitel Elektrostatik offen geblieben war:

$$\begin{array}{l} \text{Jedes quellenfreie Vektorfeld, das in } \infty \text{ wie } 1/r^2 \\ \text{verschwindet, besitzt ein Vektorpotential: d.h.} \\ \operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \exists \underline{A} : \underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \end{array} \quad (3.12)$$

Beweis: (Diffb. vorausgesetzt)

Bilde $\operatorname{rot} \underline{B}$ wie in (3.10), dann ist $\underline{A}(\underline{r})$ wie in (3.8) das gesuchte Vektorpotential wegen Eindeutigkeitssatz aus Kapitel Elektrostatik ist $\operatorname{rot} \underline{A} = \underline{B}$.

Außerdem kann Zerlegungssatz aus Kapitel Elektrostatik ergänzt werden durch Existenzsatz:

Zu beliebigen lokalisierten Quellen und (quellfreien) Wirbeln existiert ein Vektorfeld, d.h. für $q(\underline{r})$ und $\underline{v}(\underline{r})$ beliebig, mit $\text{div}\underline{v} = 0$, lokalisiert

$$\Rightarrow \exists F(\underline{r}) \text{ mit } \text{div}\underline{F} = q, \text{ rot}\underline{F} = \underline{v}$$

Bemerkung: Für beliebige Vektorfelder \underline{F} ist die Existenz des longitudinalen Anteils \underline{F}_l (mit $\text{rot}\underline{F}_l = 0$) aus Kapitel Elektrotechnik bekannt. Aus (3.12) oben folgt Existenz des transversalen Anteils \underline{F}_t (mit $\text{div}\underline{F}_t = 0$).

Die Lösung:

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' (q(\underline{r}') + \underline{w}(\underline{r}')x) \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (3.13)$$

hat die Eigenschaft $F = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ und ist laut Kapitel Elektrotechnik die einzige Lösung dieser Art.

Bei der Wahl eines Vektorpotentials, das (3.7) genügen soll, hat man mehr Freiheit als bei der Wahl des Skalarpotentials. Das Potential (3.8) hat die zusätzliche Eigenschaft:

$$\text{div}\underline{A} = 0 \quad (3.14)$$

wie bei der Herleitung zu (3.10) sichtbar wurde.

Zu(3.8) kann man einen beliebigen rotationsfreien Term hinzufügen, ohne (3.7) zu berühren. Da rotationsfreie Felder Gradienten sind, kann die allgemeine Lösung von (3.7) geschrieben werden als:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r})|_{II.8} + \text{grad}\Psi(\underline{r}) \quad (3.15)$$

Diese Transformation wird Eichtransformation genannt. Vektorpotential (3.8) mit Eichung (3.14), der Coulombgleichung, erfüllt mit (3.10) die Poissongleichung (komponentenweise).

$$\Delta \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j}(\underline{r}) \quad (3.16)$$

$$\frac{4\pi}{c} \underline{j} = \text{rot} \underline{B} = \nabla x (\nabla x \underline{A}) = \nabla (\nabla \underline{A}) - \Delta \underline{A}$$

mit $\nabla \underline{A} = 0$ in Coulomb Eichung.

Randbedingung für Magnetfelder an stromtragenden Flächen erhält man in Analogie zur Elektrostatik. Aus (3.9) ($\text{div} \underline{B} = 0$) folgt, daß die Normalkomponente von \underline{B} nie springt. !!!Hier gehört eine Zeichnung hin!!!

$$(\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.17)$$

Aus (3.11) Ampèresches Gesetz folgt, daß die Tangentialkomponente von \underline{B} springen kann, wenn eine endliche Stromstärke durch eine beliebig dünne Schicht an der Oberfläche fließt. !!!Hier gehört eine Zeichnung hin!!!

Definition: Flächenstromdichte K : $dI = j da dl = \underline{K} dl$ wobei da = Dichte der stromführenden Schicht.

$$\text{Es gilt: } (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot d\underline{l} = \frac{4\pi}{c} \underline{K} (\underline{n} \times d\underline{l})$$

$$\Rightarrow \underline{B}_2 - \underline{B}_1 = \frac{4\pi}{c} (\underline{K} \times \underline{n}) \quad (\text{oder } \underline{k} \cdot \underline{n} = 0)$$

$$\underline{n} \times (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) = \frac{4\pi}{c} \underline{k} \quad (3.18)$$

Beispiel: Supraleitende Kugel im homogenen Magnetfeld \underline{B}_0 . In Supraleiter dringt Magnetfeld bis zu einer kritischen Feldstärke B_C nicht ein. Genauso wie Metalle elektrische Felder durch Oberflächenladungen abschirmen, schirmen Supraleiter Magnetfelder durch Oberflächenströme ab (Meißnereffekt). Diese Ströme haben allerdings eine Dicke, ("Eindringtiefe") von typisch 1000 Angström.

Außerhalb der Kugel gilt:

rot $\underline{B} = \underline{Q}$ und daher existiert zu \underline{B} ein Skalarpotential Φ mit $\underline{B} = -\nabla\Phi$. Wegen $\text{div } \underline{B} = 0$ ist Φ harmonisch: $\Delta\Phi = 0$.

Randwerte:

$\Phi - zB_0 = -rB_0 \cos\vartheta$ für $|z|, r \rightarrow \infty$ und wegen (3.17) $\underline{B} \cdot \underline{n} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}|_{r=a} = 0$. Wir haben hier ein von Neumann Randwertproblem

→ Ähnlich wie im Beispiel Metallkugel im E-Feld gilt hier der Ansatz: $\Phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos\vartheta)$ mit:

$$\begin{aligned} \text{(a) } A_1 &= -B_0, A_l = 0 \quad (l > 1), A_0 \text{ beliebig} \\ \text{(b) } B_l &= 0 \quad (l > 1), A_1 - \frac{2B_1}{a^3} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} \right) = 0 \\ \Rightarrow B_1 &= -B_0 \frac{a^3}{2}, B_0 = 0 \end{aligned}$$

⇒

$$\Phi(r, \vartheta) = - \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) B_0 \cos\vartheta = - \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \underline{r} \cdot \underline{B}_0 \quad (3.19)$$

Dem Feld \underline{B}_0 wird ein (diamagnetisches) Dipolfeld mit dem magnetischen Dipolmoment $\underline{m} = -\frac{a^3}{2}B_0$ überlagert.

Das tangentielle Feld an der Kugeloberfläche ist $B = \frac{\partial\Phi}{r\partial\vartheta}|_{r=a} = \frac{3}{2}B_0 \sin\vartheta$
 Die Kugel schirmt ein äußeres Feld B_0 ab, solange $B_0 < \frac{2}{3}B_c$ ist. Aus (3.18) berechnet man leicht die Dichte der Oberflächenströme. Sie fließen auf den Breitenkreisen und sind durch $K_\varphi = -\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{3}{2}B_0 \sin\vartheta$ wiedergegeben.

Wir untersuchen nun das Feld einer lokalisierten Stromverteilung in großem Abstand und begnügen uns hier mit dem ersten nicht-verschw. Term (3.8):

$$A(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int J(\underline{r}') \frac{d^3r'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} : \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^3} + \dots$$

!!!rechts gehört eine Zeichnung hin!!!

Es gilt für stationäre lokalisierte Ströme:

$$\int d^3r' \underline{J}(\underline{r}') = 0 \quad (3.21)$$

und

$$\int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') = -\frac{1}{2} \underline{r} \times \int d^3r' \underline{r}' \times \underline{J}(\underline{r}') \quad (3.22)$$

(siehe Übung)

Mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\underline{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \underline{r}' \times \underline{J}(\underline{r}') \quad (3.23)$$

folgt:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.24)$$

das Vektorpotential eines magnetischen Dipolfeldes

Feld für $r \neq 0$:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times \left(\underline{m} \times \left(\nabla - \frac{1}{r} \right) \right) = (\underline{m} \nabla) \left(\frac{-\underline{r}}{r^3} \right) - \underline{m} \nabla \frac{1}{r} \quad (3.25)$$

$$= -\frac{\underline{m}}{r^3} + \frac{3(\underline{m} \cdot \underline{r})\underline{r}}{r^5} \quad (3.26)$$

\Rightarrow

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{3(\underline{m} \cdot \underline{r}) \cdot \underline{r} - r^2 \underline{m}}{r^5} + \dots \quad (3.27)$$

$\hat{=}$ elektrisches Feld eines Dipolmomentes \underline{p} in Elektrostatik, dort jedoch gewonnen aus dem Skalarpotential

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} \quad (3.28)$$

Einfache geometrische Bed. von (3.23) für ebenen linienförmigen Strom der Stärke I

$$\underline{J} \cdot d^3r' = \underline{J} \cdot d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{f} = I \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \underline{m} = \frac{I}{2c} \oint \underline{r}' \times d\mathbf{l} \quad (3.29)$$

Also (wie beim Flächensatz der Punktmechanik)

$$\underline{m} = \frac{1}{c} I \cdot \underline{F} \quad (3.30)$$

wobei \underline{F} die Fläche ist, die ebenen Strom I umschließt.

Wenn Strom durch Teilchen der Ladung q_i mit Masse m_i erzeugt wird, die sich am Ort \underline{r}_i mit der Geschwindigkeit \underline{v}_i bewegen, kann das Moment mit Drehimpuls in Verbindung gebracht werden. Die Stromdichte ist dann

$$\underline{J}(\underline{r}) = \sum_i q_i \cdot \underline{v}_i \cdot \delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \quad (3.31)$$

\Rightarrow magnetisches Moment

$$\underline{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i \cdot \underline{r}_i \times \underline{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2cm_i} \underline{L}_i \quad (3.32)$$

wobei $\underline{L}_i = m_i \cdot \underline{r}_i \times \underline{v}_i$ Drehimpuls des i -ten Teilchens ist.

Falls alle Teilchen dasselbe Verhältnis $q_i/m_i = e/m$ haben, folgt

$$\underline{m} = \frac{e}{2mc} \underline{L} \quad (3.33)$$

mit Gesamtdrehimpuls $\underline{L} = \sum_i \underline{L}_i$.

In Atomen wird \underline{m} mit großer Genauigkeit ausschließlich durch Elektron erzeugt. Trotzdem gilt nicht:

$$\underline{m} = \frac{e}{2m_e c} \underline{L}_{\text{elektron}}$$

Die Diskrepanz beruht auf dem Spin (= Eigendrehimpuls) der Elektronen und wird durch quantenmechanische Beschreibung der Elektronen aufgelöst.

Eine diskrete Stromdichte (wie (3.31) ist eigentlich nicht stationär! Dieselbe Betrachtung mit kontinuierlicher Verteilung lautet so: Elektronen eines Atoms mit der Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ und Massendichte $n(\underline{r})\rho(\underline{r}) = \frac{e}{m}n(\underline{r})$, mögen sich mit Geschwindigkeit $\underline{v}(\underline{r})$ bewegen ($\rho(\underline{r})$ und $\underline{v}(\underline{r})$ sind nicht völlig unabhängig, müssen $\text{div } \underline{J} = 0$ genügen).

$\Rightarrow \underline{J} = \rho \cdot \underline{v}$ und man erhält (3.33) mit $\underline{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r (\underline{r} \times \underline{v}) \rho(\underline{r})$ und $\underline{L} = \int d^3r (\underline{r} \times \underline{v}) \cdot n$

Die Kraft und das Drehmoment, die ein äußeres Feld $\underline{B}(\underline{r})$ auf eine Stromverteilung ausübt, kann aus der Lorentzkraft (3.5) gewonnen werden. Gesamte Kraft auf Stromverteilung (3.31).

$$\underline{F} = \sum_i q_i \frac{\underline{v}_i}{c} \times \underline{B}(\underline{r}_i) = \frac{1}{c} \int d^3r \underline{J}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}) \quad (3.34)$$

Analog das gesuchte Drehmoment

$$\underline{N} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \frac{1}{c} \int d^3r \underline{r} \times (\underline{J}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r})) \quad (3.35)$$

Für ein homogenes äußeres Feld \underline{B} sieht man sofort mit (3.21) $\int d^3r \underline{J}(\underline{r}) = 0$ daß $\underline{F} = 0$ und \underline{N} mit $\underline{r} \times (\underline{J} \times \underline{B}) = (\underline{r} \cdot \underline{B}) \underline{J} - (\underline{r} \cdot \underline{J}) \underline{B}$ wegen (3.22) und der Relation

$$\int d^3r \underline{r} \cdot \underline{J}(\underline{r}) = 0 \quad (3.36)$$

die Gestalt

$$\underline{N} = \underline{m} \times \underline{B} \quad (3.37)$$

erhält.

Taylorentwicklung von (3.34) und (3.35) um \underline{r}_0 : (\underline{B} variiert langsam um \underline{r}_0 , \underline{r}_0 im Bereich der Stromverteilung):

$$B_i(\underline{r}) = B_i(\underline{r}_0) + (\underline{r} \cdot \nabla) B_i(\underline{r}_0) + \dots \quad (3.38)$$

Drehmoment:

$$\begin{aligned}
\underline{N} &= \frac{1}{c} \int d^3r \underline{r} \times (\underline{J}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}_0)) + \dots \\
&= \frac{1}{c} \int d^3r ((\underline{r} \cdot \underline{B}(\underline{r}_0)) \underline{J}(\underline{r}) - (\underline{r} \cdot \underline{J}(\underline{r})) \cdot \underline{B}) + \dots \\
&\quad \nabla \cdot (r^2 \underline{J}) = 2 \underline{r} \cdot \underline{J} + r^2 \underbrace{\nabla \cdot \underline{J}}_{=0 \text{ in M-Statik}} \\
&\Rightarrow \int d^3r (\underline{r} \cdot \underline{J}(\underline{r})) = \frac{1}{2} \int d^3r \nabla \cdot (r^2 \underline{J}) \\
&= \frac{1}{2} \oint_F d^3r (r^2 \underline{J}) = 0 \\
&= \frac{1}{c} \int d^3r (\underline{r} \cdot \underline{B}(\underline{r}_0)) \underline{J}(\underline{r}) + \dots \\
&\stackrel{(3.22)}{=} -\underline{B}(\underline{r}_0) \times \frac{1}{2} \int d^3r (\underline{r} \times \underline{J}(\underline{r})) + \dots \\
&= \underline{m} \times \underline{B} + \dots
\end{aligned}$$

Kraft:

$$\begin{aligned}
\underline{F} &\stackrel{(3.34)}{=} -\frac{1}{c} \underline{B}(\underline{r}_0) \times \underbrace{\int d^3r \underline{J}(\underline{r})}_{=0} - \frac{1}{c} \int d^3r (\underline{r} \cdot \nabla) \underline{B}(\underline{r}_0) \times \underline{J}(\underline{r}) \\
&\quad \text{Beachte: z.B. } ((\underline{r} \cdot \nabla) \underline{B})_x = x J_x B_x + y J_y B_x + z D_z B_x \\
&\quad \text{Nun } \underline{r} \times \underbrace{(\nabla \times \underline{B})}_{=0} = \nabla(\underline{r} \cdot \underline{B}) - (\underline{r} \cdot \nabla) \cdot \underline{B} = 0 \\
&= -\frac{1}{c} \nabla_{\underline{r}_0} \times \int d^3r (\underline{r} \cdot \underline{B}) \underline{J}(\underline{r}) + \dots \\
&\stackrel{(3.22)}{=} \frac{1}{2c} \nabla \times (\underline{B} \times \int d^3r (\underline{r} \times \underline{J}(\underline{r}))) + \dots \\
&= \nabla_{\underline{r}_0} \times (\underline{B} \times \underbrace{\left(\frac{1}{2c} \int d^3r (\underline{r} \times \underline{J}(\underline{r})) \right)}_{=\underline{m}}) \\
&= \nabla_{\underline{r}_0} \times (\underline{B} \times \underline{m}) = \underbrace{\underline{m} \cdot \nabla}_{\nabla_{\underline{r}_0}(\underline{m} \cdot \underline{B})} \underline{B} - \underbrace{(\nabla \cdot \underline{B})}_{=0} \underline{m} + \dots
\end{aligned}$$

⇒

$$\underline{E} = \nabla_{r_0}(\underline{m} \cdot \underline{B}) + \dots \quad (3.39)$$

3.2 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Der enge Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern wird erst bei zeitlich veränderlichen Erscheinungen deutlich. Wir werden dies erstmals beim Induktionsgesetz sehen.

Betrachte im Raum festliegende Leiterschleife $L = \text{Rand einer orientierten Fläche } F (L = \partial F)$.

Faradays Beobachtung:

In L wird Strom induziert, wenn sie sich in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld befindet. ⇒ zeitlich veränderliches Magnetfeld induziert elektrisches Feld im Raum.

Quantitativ:

$$\oint_L \underline{E} \cdot d\underline{r} = -\frac{1}{c} \iint_F \dot{\underline{B}} \cdot \underline{n} \, df \quad (3.40)$$

Linke Seite hängt nicht von der Wahl der Fläche bei vorgegebenem Rand L ab. Rechte Seite wegen $\text{div } \underline{B}$ ebenfalls nicht.

Stokesscher Satz

$$\oint_L \underline{E} \cdot d\underline{r} = \iint_F \text{rot } \underline{E} \, df,$$

(3.40) gilt für beliebige F und L .

⇒ differentielle Form des Induktionsgesetzes:

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}}$$
(3.41)

Durch Induktion entstehen elektrische Felder, die in der Elektrostatik wegen $\text{rot } \underline{E} = 0$ unbekannt waren.

(3.40) für ruhende Leiterschleifen formuliert. Beliebige bewegte Schleifen:

$$\epsilon = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_F \underline{B} \cdot \underline{n} \, df$$
(3.42)

Rechte Seite: wie in (3.40) zeitliche Ableitung des magnetischen Flusses durch F ,

a) durch zeitliche Änderung von \underline{B}

b) durch Bewegung von $L = \partial F$

Linke Seite: elektromotorische Kraft ϵ

ϵ erzeugt bei Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes wie $\oint \underline{E} \, d\underline{r}$ in (3.40) einen Strom $I = \epsilon/R$ (R = Widerstand in der Schleife).

Wir werden ϵ auch als Zirkulation eines elektrischen Feldes E_{ind} schreiben im passenden Bezugssystem.

Zum Verständnis von (3.42) betrachte den Spezialfall einer beliebigen bewegten (und dabei auch deformierten) Leiterschleife in einem zeitlich konstanten Magnetfeld $\underline{B}(\underline{r})$

SKIZZE!!!

→ Es gibt kein elektrisches Feld (B konst.), aber Elektronen im Leiter spüren die Lorentzkraft (3.5). $\underline{F} = q \cdot \underline{v} \times \underline{B}/c$. Wirkt genauso wie die induzierte elektrische Feldstärke.

$$E_{ind} = \underline{v} \times \underline{B}/c \quad (3.43)$$

Die Zirkulation $\epsilon = \oint_L E_{ind} \cdot d\underline{r}$ erzeugt wieder Strom $I = \epsilon/R$.

Die zeitliche Änderung des Flusses $\Phi(t) = \iint_{F(t)} \underline{B} \cdot d\underline{f}$ erhalten wir folgendermaßen:

Wegen $\text{div } \underline{B} = 0$ fließt aus dem Volumen, das durch $F(t)$, $F(t + dt)$, und die im Zeitintervall dt vom Rand L überstrichene Fläche F_R begrenzt wird, kein magnetischer Fluß, d.h. :

$$\begin{aligned} \Phi(t + dt) + \Phi_R + (-\Phi_t) &= 0 \\ \Rightarrow d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) &= -\Phi_R = - \iint_{F_R} \underline{B} \cdot d\underline{f} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Skizze!

Die Flächenelemente $d\underline{f}$ sind aber durch $d\underline{f} = d\underline{r} \times \underline{v} dt$ gegeben.

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Phi_R &= \oint_L \underline{B}(\underline{r}) \cdot (d\underline{r} \times \underline{v} dt) \\ &= dt \oint_L (\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r})) \cdot d\underline{r} \\ &= c \cdot dt \oint_L \underline{E}_{ind} \cdot d\underline{r} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (3.42)$

Allgemeiner Fall: Effekt der Lorentzkraft und Induktionseffekt (3.40) addieren sich. Die Ringspannung ϵ kann durch Zirkulation geschrieben werden:

$$\epsilon = \oint_L \underline{E}_{ind} \cdot d\underline{r} \quad (3.45)$$

wobei

$$\underline{E}_{ind} = \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \quad (3.46)$$

sich aus realem elektrischen Feld (3.41) und fiktivem $1/c \underline{v} \times \underline{B}$ zusammensetzt.

Bis hierher erscheint es so, als ob Induktionsphänomene zweierlei Ursachen haben könnten. Die Kraft $\underline{F} = q \cdot \underline{E}_{ind}$ auf ein Elektron setzt sich aus zwei Anteilen zusammen (3.46). Wie eng diese beiden Anteile verknüpft sind zeigt erst ein Wechsel des Bezugssystems.

Annahme: Kraftformel (3.46) gelte in jedem Inertialsystem. Die Kraft \underline{F}_1 auf ein Elektron im Inertialsystem I_1 : $F_1 = q (E_1 + \frac{1}{c} \underline{v}_1 \times \underline{B}_1)$. Inertialsystem I_2 bewege sich relativ zu I_1 mit Geschwindigkeit $\underline{v}_0 \ll c$

\implies Galilei-Transformation: $\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \underline{v}_0$.

Kraft ist $\underline{F}_2 = \underline{F}_1$ (beachte $v_0 \ll c$!)

Beobachter in I_2 würde Interpretation $\underline{F}_2 = q \cdot \underline{E}_2 + \frac{1}{c} (\underline{v}_2 \times \underline{B}_2)$ wählen.

\implies

$$\begin{aligned} \underline{E}_2 &= \underline{E}_1 + \frac{1}{c} (\underline{v}_0 \times \underline{B}_1 + O\left(\left(\frac{v_0}{c}\right)^2\right)) \\ \underline{B}_2 &= \underline{B}_1 + \underbrace{O\left(\frac{v_0}{c}\right)}_{\text{folgt aus der Galilei-Invarianz des Ampèreschen Gesetzes}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

SKIZZE!

Die Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ bewege sich stationär mit Geschwindigkeit \underline{v}_1 :

$$\begin{aligned} \rho(\underline{r} + \underline{v}_1 t) &= \rho(\underline{r}) \\ (??) \Rightarrow \underline{E}_1(\underline{r}) &= \int d^3 r' \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die Stromdichte $J(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) \cdot \underline{v}$ erzeugt nach (3.6) ein magnetisches Feld

$$\underline{B}_1(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' J(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} = \frac{1}{c} \underline{v}_1 \times \underline{E}_1(\underline{r}) \quad (3.49)$$

Der Beobachter in I_2 sieht dagegen nach (3.6) das magnetische Feld

$$\begin{aligned} \underline{B}_2(\underline{r}) &= \frac{1}{c} (\underline{v}_1 - \underline{v}_0) \times \underline{E}_1(\underline{r}), \quad \text{d.h.} \\ &\underline{v}_0 \times \underline{E}_1 + O\left(\left(\frac{v_0}{c}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Das Transformationsverhalten der Felder für größere Geschwindigkeiten erläutern wir später anhand einer Lorentz-Transformation.

Mit der Kenntnis des Induktionsgesetzes können wir nun auch die magnetische Feldenergie verstehen. Folgender Mechanismus macht es erforderlich, beim Anwurf von Strömen Energie aufzubringen:

Die anwachsenden Magnetfelder induzieren elektromagnetische Kräfte, die den Strömen entgegenzuwirken versuchen (hierbei ist das Vorzeichen im Induktionsgesetz (3.40 - 3.42) entscheidend, Stichwort "Lenz'sche Regel").

Die Ströme leisten gegen diese Kräfte Arbeit: Bei der Verschiebung der Ladung q um $\delta \underline{s}$ im Feld \underline{E} gewinnt man die Arbeit $\delta A = q \cdot \underline{E} \cdot \delta \underline{s}$.

Die Stromdichte $\underline{J} = \rho \underline{v}$ gewinnt daher im Zeitintervall δt , $\underline{v} \delta t = \delta \underline{s}$, im Volumenelement δV , $q = \rho \delta V$, die Arbeit $\delta A = \rho \delta V \underline{E} \cdot \underline{v} \delta t = \underline{J} \cdot \underline{E} \delta V \delta t$

\implies Es wird die räumliche Dichte der Leistung

$$\boxed{\underline{J}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r})} \quad (3.51)$$

gewonnen, die dem elektrischen Feld (etwa durch die Spannungsquelle) als mechanische Energie zugeführt wurde.

Bekannt Anwendung dieser Formel: Ohmscher Leiter, durch den ein stationärer Strom der Dichte $\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E}$ fließt. Die Leistungsdichte $\underline{J} \cdot \underline{E} = \sigma E^2 = J^2 / \sigma$, die der Strom gewinnt und als Wärme abgibt, ist von der Spannungsquelle aufzubringen.

Wir wollen nun die lokalisierte Stromdichte $\underline{J}(\underline{r}) = \sum_{\nu=1}^n$ in kleinen Portionen \underline{J}_{ν} anwerfen.

Beim Anwerfen von \underline{J}_{ν} entsteht ein Magnetfeld \underline{B}_{ν} nach (3.6), (3.10) und vorübergehend das Feld \underline{E}_{ν} nach (3.41). Die schon vorhandene Stromdichte $\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \underline{J}_{\mu}(\underline{r})$ gewinnt im Feld \underline{E}_{ν} die Leistung:

$$\boxed{\int d^3r \underline{E}_{\nu} \cdot \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \underline{J}_{\mu}} \quad (3.52)$$

Wegen

$$(a) \quad \underline{J}_{\mu} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \underline{B}_{\mu}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } \operatorname{div}(\underline{E}_\nu \times \underline{B}_\mu) &= \underline{B}_\mu \operatorname{rot} \underline{E}_\nu - \underline{E}_\nu \operatorname{rot} \underline{B}_\mu \\
\Rightarrow \underline{E}_\nu \cdot \underline{J}_\mu &= \frac{c}{4\pi} \underline{E}_\nu \cdot \operatorname{rot} \underline{B}_\mu = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\underline{E}_\nu \times \underline{B}_\mu) + \frac{c}{4\pi} \underline{B}_\mu \operatorname{rot} \underline{E}_\nu \\
\text{(c) } \operatorname{rot} \underline{E}_\nu &= -\frac{1}{c} \underline{B}_\nu
\end{aligned}$$

folgt:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\int d^3r \underline{E}_\nu \cdot \underline{J}_\mu &\stackrel{\text{(a+b)}}{=} -\frac{c}{4\pi} \oint (\underline{E}_\nu \times \underline{B}_\mu) df \\
&+ \frac{c}{4\pi} \int d^3r \underline{B}_\mu \operatorname{rot} \underline{E}_\nu \\
&\stackrel{\text{(c)}}{=} -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \underline{B}_\mu
\end{aligned}
} \tag{3.53}$$

(Flächenintegral verschwindet wegen $\underline{B}_\mu \propto 1/r^3$).

Die den Strömen beim Einschalten von \underline{J}_ν zugeführte Arbeit ist also

$$\int dt \int d^3r \underline{E}_\nu \cdot \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \underline{J}_\mu = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \underline{B}_\nu \cdot \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \underline{B}_\mu$$

$$\Rightarrow \text{Gesamtarbeit} = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \sum_{\mu,\nu} \underline{B}_\mu \cdot \underline{B}_\nu$$

wegen

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\nu-1} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^n \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n \delta_{\nu\mu}}$$

trägt bei beliebig feiner Zerlegung ($n \rightarrow \infty$) beliebig wenig bei!

Offenbar “gewinnen” die Ströme beim Einschalten eine negative Energie. Sie leisten also eine positive Arbeit gegen die induzierten Felder. Diese Arbeit manifestiert sich nach Einschalten im Magnetfeld und ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r B^2(\underline{r}) \quad (3.54)$$

Die enge Verwandtschaft mit (??) ist überraschend, da verschiedene Herkunft der elektrischen und magnetischen Feldmenge.

Durch partielle Integration kann man auch ein $U_{E-Stat} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r}) \Phi(\underline{r})$ analoges Resultat erreichen:

$$B^2 = \underline{B} \operatorname{rot} \underline{A} = \operatorname{div} (\underline{A} \times \underline{B}) + \underline{A} \operatorname{rot} \underline{B}$$

.

Mit

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\underline{J}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (3.55)$$

verschwindet

$$\int d^3r \operatorname{div} \underline{A} \times \underline{B} = \iiint d^3r' \underline{A} \times \underline{B} \quad (3.56)$$

\Rightarrow

$$U = \frac{1}{2c} \int d^3r \underline{J}(\underline{r}) \cdot \underline{A}(\underline{r}) \quad (3.57)$$

3.3 Der Maxwellsche Verschiebungsstrom

Bisher gewonnene Gleichungen für E und B :

Quellen:

$$\text{div } \underline{E} = 4\pi\rho \quad (3.58)$$

(Coulomb)

$$\text{div } \underline{B} = 0 \quad (3.59)$$

(keine magnet. Monopole)

in sich konsistent, da $\text{div } \underline{X}$ beliebiges Skalarfeld sein kann. Magnetische Ladungen könnten existieren, sind aber nicht bekannt.

Wirbel:

$$\text{rot } \underline{E} = \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} \quad (3.60)$$

(Induktionsgesetz)

auch in sich konsistent. Für Vektorfeld \underline{X} muß zwar $\text{div } \underline{X} = 0$ gelten, aber $\text{div } \underline{B} = 0$ garantiert diese Eigenschaften.

$$\text{rot } \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} \quad (3.61)$$

(Ampèresches Gesetz)

bisher nur für stationäre Ströme, $\operatorname{div} \underline{J} = 0$. Kann wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{B} = 0$ auch nur für stationäre Ströme gelten!

Allgemeiner Fall: \underline{J} ist durch quellenfreies Vektorfeld zu ersetzen.
Eine Möglichkeit durch Kontinuitätsgleichung (3.2):

$$\operatorname{div} \underline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.62)$$

Mit $4\pi\rho \operatorname{div} \underline{E}$ ist $\underline{J} + \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{E}}$ immer quellenfrei
 \leadsto Maxwellsche Ergänzung

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \dot{\underline{E}} \quad (3.63)$$

Damit sind die Maxwellschen Gleichungen vollständig!

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \operatorname{div} \underline{E} = 4\pi\rho \\ \text{(b)} & \operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}} \\ \text{(c)} & \operatorname{div} \underline{B} = 0 \\ \text{(d)} & \operatorname{rot} \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \dot{\underline{E}} \end{array} \quad (3.64)$$

Konsequenzen dieser Gleichungen experimentell mit hoher Genauigkeit verifiziert.

Beachte Symmetrie bei Vertauschung von \underline{E} und \underline{B} , die durch Maxwellsche Ergänzung erreicht wurde. Symmetrie bzgl. \underline{E} und \underline{B} wird nur durch Abwesenheit magnetischer Ladungen gestört.

\leadsto Spekulation: Welche Gestalt hat Elektrodynamik mit magnetischen Ladungen?

Gleichungen(3.64)(a,d) unverändert

$$(c) \rightarrow \operatorname{div} \underline{B} = \underbrace{4\pi\rho_m}_{\text{Dichte magn. Ladungen}} \quad (c')$$

$$(b) \rightarrow \operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}} - \frac{4\pi}{c} \underline{J}_m \quad (b')$$

wenn magnetische Ladung erhalten:

$$\operatorname{div} \underline{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \quad (3.65)$$

\Rightarrow Kraft auf Probekörper der elektrischen Ladung e und magnetischer Ladung g .

$$\begin{aligned} \underline{F} &= e \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \\ &+ g \left(\underline{B} - \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{E} \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Symmetrie der Maxwellgleichungen erlaubt folgende Transformation:

$$\begin{aligned} \underline{J}' &= \underline{J} \cos \alpha + \underline{J}_m \sin \alpha, \quad \rho' = \rho \cos \alpha + \rho_m \sin \alpha \\ \underline{J}'_m &= -\underline{J} \sin \alpha + \underline{J}_m \cos \alpha, \quad \rho'_m = -\rho \sin \alpha + \rho_m \cos \alpha \\ \underline{E}' &= \underline{E} \cos \alpha + \underline{B} \sin \alpha, \quad \underline{B}' = -\underline{E} \sin \alpha + \underline{B} \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.67)$$

“2-dimensionale Drehung” läßt Maxwellgleichungen invariant!

Frage (präzise: Ist das Verhältnis g/e für alle Teilchen dasselbe?) nach magnetischen Ladungen:

Annahme: Ladungsverhältnis g/e für alle Elementarteilchen gleich.

$$\leadsto \underline{J}_m = \frac{g}{e} \underline{J}, \quad \rho_m = \frac{g}{e} \rho$$

Wähle Drehwinkel α : $tg\alpha = g/e \Rightarrow$ in (3.67): $\underline{J}'_m = 0, \rho'_m = 0!$

d.h. magnetische Ladungen und Ströme sind aus den Maxwellgleichungen verschwunden. Auch verallgemeinerte Lorentzkraft (3.66) reduziert sich auf die übliche Form, denn mit $q = \sqrt{e^2 + g^2}$ ($\Rightarrow e = q \cos \alpha, g = q \sin \alpha$) lautet sie

$$\underline{F} = q \left(\underline{E}' + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B}' \right) \quad (3.68)$$

3.4 Die inhomogene Wellengleichung

Wir wenden uns jetzt der Lösung der Maxwellgleichungen (3.64) zu. Die homogenen Gleichungen (a) und (b) gestatten die Beschreibung der Felder durch Potentiale:

$\text{div } \underline{B} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A}$ Vektorpotential:

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \quad (3.69)$$

(b) $\Rightarrow \text{rot } \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} = \text{rot } \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{A}} \right) = 0 \Rightarrow \exists \Phi$ Skalarpotential:

$$\underline{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\underline{A}} \quad (3.70)$$

Durch (3.69) und (3.70) werden (a),(b) identisch erfüllt. Einsetzen der Po-

potentiale in (a), (b):

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \underline{A} + \frac{1}{c} \Phi \right) &= -4\pi\rho \\ \Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} - \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \underline{A} + \frac{1}{c} \Phi \right) &= -\frac{4\pi}{c} \underline{J} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Entkoppeln, falls es gelingt Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \underline{A} - \frac{1}{c} \Phi = 0 \quad (3.72)$$

zu erfüllen.

Dann genügen Φ und jede der drei Komponenten von \underline{A} der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi &= -4\pi\rho \\ \Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} &= -\frac{4\pi}{c} \underline{J} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Erfüllbarkeit von (3.72):

Umzeichnung der Potentiale. Mit \underline{A} erfüllt auch jedes

$$\underline{A}' = \underline{A} + \operatorname{grad} \mathcal{X} \quad (3.74)$$

mit beliebigem \mathcal{X} den Zweck. (3.69) und (3.74) umfassen Unbestimmbarkeit von \underline{A} vollständig (bei vorgegebenem \underline{B}). Gleichzeitig muß Φ umgeichtet

werden, damit \underline{E} -Feld (3.70) nicht berührt wird:

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathcal{X}} \quad (3.75)$$

Die Eichtransformation (3.74) und (3.75) gibt an, welche Freiheit man bei der Wahl der Potentiale hat.

Annahme: Haben irgendwelche Potentiale \underline{A}, Φ . Versuchen sie so umzueichen, daß \underline{A}', Φ' die Bedingung (3.72) erfüllen

$$0 \stackrel{!}{=} \operatorname{div} \underline{A}' - \frac{1}{c} \dot{\Phi}' = \operatorname{div} \underline{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathcal{X} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathcal{X}}$$

\Rightarrow

$$\Delta \mathcal{X} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{X} = -\operatorname{div} \underline{A} - \frac{1}{c} \dot{\Phi} \quad (3.76)$$

\mathcal{X} muß also auch einer inhomogenen Wellengleichung genügen.

Nebenbedingung (3.72) heißt Lorentzbedingung, alle Potentiale, die sie erfüllen, gehören zur Lorentzzeichnung.

Eichtrafos, die verschiedene solcher Potentiale verknüpfen, werden durch Funktionen erzeugt, die der homogenen Wellengleichung genügen.

$$\Delta \mathcal{X} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{X} = 0 \quad (3.77)$$

Außer der Lorentzgleichung gebraucht man oft auch die Coulombbedingung

$$\operatorname{div} \underline{A} = 0 \quad (3.78)$$

(siehe Magneto-Statik). In dieser Eichung erfüllt Φ die Poissongleichung

Aus (3.71) und (3.78) folgt

$$\Delta \Phi = -4\pi\rho \quad (3.79)$$

also

$$\Phi(\underline{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (3.80)$$

(instantanes Coulomb-Potential)

Vektorpotential gehorcht Wellengleichung (3.71) und (3.78) \Rightarrow

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{J} + \operatorname{grad} \dot{\Phi} \quad (3.81)$$

Rechte Seite:

Zerlegen Stromdichte \underline{J} in longitudinalen und transversalen Anteil (siehe Elektrostatik und (3.14)).

$$\underline{J} = \underline{J}_l + \underline{J}_t \quad (3.82)$$

\underline{J}_l (mit $\text{rot } \underline{J}_l = 0$, $\text{div } \underline{J}_l = \text{div } \underline{J}$) ist durch

$$\underline{J}_l(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int d^3r' \frac{\text{div } \underline{J}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (3.83)$$

gegeben (Standardlösung eines typisch elektrostatischen Problems).

Wegen Kontinuitätsgleichung (3.2) und mit (3.80)

$$\underline{J}_l(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \text{grad } \dot{\Phi} \quad (3.84)$$

und Wellengleichung (3.81) wird zu

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{J}_t \quad (3.85)$$

Man nennt daher die Coulomb-Eichung auch “transversale Eichung”.

Schließlich wird (3.78) auch “Strahlungseichung” genannt, wegen: wir werden sehen, daß die Strahlungsfelder $\underline{E}, \underline{B}$ transversale Felder sind (\underline{B} sowieso immer). Da $-\nabla\Phi$ in (3.70) $\underline{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \dot{\underline{A}}$ rein longitudinal ist, kann man Φ weglassen, wenn man dafür sorgt, daß $-\frac{1}{c} \dot{\underline{A}}$ transversal ist. Letzteres wird aber durch Coulomb-Eichung erreicht!

Lösung der Maxwellgleichung für Lorentz- und Coulomb-Eichung auf Lösung der inhomogenen Wellengleichung zurückgeführt.

Es genügt, die Wellengleichung für eine Komponente zu betrachten:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 4\pi f(\underline{r}, t) \quad (3.86)$$

Ähnlich Poisson-Gleichung! Halten uns bei der Lösung eng daran.
zeitlich Fourier-transf. Funktionen:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\underline{r}, \omega) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \psi(\underline{r}, t) \\ \tilde{f}(\underline{r}, \omega) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} f(\underline{r}, t) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Beachte die Konvention der Vorzeichen in Gleichung (3.87) und (3.88)!

Theorie der Fourier-Transformation: Integral-Trafo reziprok

$$\begin{aligned} \psi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\psi}(\underline{r}, \omega) \\ f(\underline{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{f}(\underline{r}, \omega) \end{aligned} \quad (3.88)$$

denn:

$$\begin{aligned}
 \psi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t'} \psi(\underline{r}, t') \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \psi(\underline{r}, t') \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}}_{\stackrel{!}{=} \delta(t-t')} \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

Verifiziere Darstellung der δ -Funktion

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} = \delta(t-t')} \quad (3.90)$$

Füge in Integral (3.90) konvergenzerzeugenden Faktor $e^{-\alpha|\omega|}$ hinzu, dann $\alpha \rightarrow 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{ia(t'-t) - \alpha|\omega|} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha - i(t' - t)} + \frac{1}{\alpha + i(t - t')} \right) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (t' - t)^2)}$$

Beachte: (3.87) und (3.88) implizieren eindeutige Umkehrbarkeit der Fourier-Transformation:

$$\boxed{\forall t: \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = 0 \Rightarrow \psi(\omega) = 0} \quad (3.91)$$

Räumliche Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}(q) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-iqx} g(x) \\
 g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{iqx} \tilde{g}(q)
 \end{aligned}
 \tag{3.92}$$

Beachte die (zeitliche) Vorzeichen-Konvention!

$$\begin{aligned}
 (g(\underline{r})) \text{ analog } \tilde{g}(q) &= \int d^3r e^{-iq\cdot\underline{r}} g(\underline{r}) \\
 g(\underline{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{iq\cdot\underline{r}} \tilde{g}(q)
 \end{aligned}
 \tag{3.93}$$

Räumlich-zeitliche Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}(q, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3r \psi(\underline{r}, t) e^{i(\omega t - q\cdot\underline{r})} \\
 \psi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3q \tilde{\psi}(q, \omega) e^{-i(\omega t - q\cdot\underline{r})}
 \end{aligned}
 \tag{3.94}$$

analog für $f(\underline{r}, t) \longleftrightarrow \tilde{f}(q, \omega)$

Einsetzen von (3.94)b in Wellengleichung (3.86):

$$\begin{aligned}
 \Delta e^{iq\cdot\underline{r}} &= -q^2 e^{iq\cdot\underline{r}} \\
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-i\omega t} &= -\frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t}
 \end{aligned}$$

$$\left(q^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \tilde{\psi}(q, \omega) = 4\pi \tilde{f}(q, \omega) \quad (3.95)$$

bzw.

$$\tilde{\psi}(q, \omega) = \frac{4\pi}{q^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2} \tilde{f}(q, \omega) \quad (3.96)$$

Suchen Greensfunktion für Wellengleichung, d.h. lösen

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underbrace{G(\underline{r}, t, \underline{r}', t')}_{=G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')} = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t') \quad (3.97)$$

Fourier-Transformation \Rightarrow

$$\tilde{G}(q, \omega) = \frac{4\pi}{q^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2} \quad (3.98)$$

wobei $\tilde{G}(q, \omega)$ Fourier-Transformation von $G(\underline{r}, t)$

Behauptung:

rechte Seite von (3.97) ist räumliche Fourier-Transformation von $\frac{e^{-i\omega t}}{r}$

Beweis:

Betrachte

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{e^{\kappa r}}{r} \quad (3.99)$$

(Yukawa-Potential)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{\Phi}(q) &= \int d^3r \frac{e^{-\kappa r}}{r} e^{-iq \cdot r} = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr e^{-\kappa r} \sin qr \\
&= \frac{4\pi}{q} I_m \underbrace{\int_0^\infty dr e^{-\kappa r + iqr}}_{= \frac{1}{\kappa - iq}} \\
&= \frac{4\pi}{\kappa^2 + q^2} \tag{3.100}
\end{aligned}$$

Mit

$$\kappa^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (\text{also } \kappa = \pm i\frac{\omega}{c}) \tag{3.101}$$

ist

$$\frac{4\pi}{q^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} = \int d^3r \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r} e^{-iq \cdot r} \tag{3.102}$$

bzw.

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{4\pi}{q^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} e^{+iq \cdot r} = \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r} \tag{3.103}$$

Also

$$\begin{aligned}
G(\underline{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3q \frac{4\pi}{q^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} e^{-i(\omega t - q \cdot \underline{r})} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r} e^{-i\omega t} \\
&= \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega\left(t \pm \frac{r}{c}\right)} \tag{3.104}
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$G_{\pm}(\underline{r}, t) = \frac{1}{r} \delta\left(t \pm \frac{r}{c}\right)$$

(3.105)

Bemerkung:

(3.98) gibt zwei Lösungen für (3.97), nicht wie Lösungen der Poissongleichung

eindeutig $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ hyperbelscher Differentialoperationen, \longleftrightarrow elliptischer Differentialoperationen $\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Bedeutung der Lösung: $\frac{1}{r} e^{\pm iqr - i\omega t}$ auslaufende (+) bzw. einlaufende (-) Kugelwellen! Quellen der Wellengleichung (3.97) (rechte Seite) sind zeitlich und räumlich punktförmig. Explizit:

$$G_{\pm}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \delta \left(t - \left[t' \pm \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \right] \right) \quad (3.106)$$

Die Punktquelle am Ort \underline{r}' zur Zeit t' ist von einer Kugelwelle begleitet, die sich bei der retardierenden Lösung G^+ nach der Zeit $t - t'$ im Abstand $|\underline{r} - \underline{r}'| = c(t - t')$ von der Quelle befindet. Bei der avancierten Lösung G^- läuft diese Kugelwelle ein, und zwar ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit

$$G^+ : \bullet^{t=t'} \text{ (bitte ergänzen)}$$

Wir gehen nun von (3.95) über zur zeitabhängigen Lösung der Wellengleichung (3.86).

$$\begin{aligned} \psi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3q \tilde{\psi}(q, \omega) e^{-i(\omega t - q \cdot \underline{r})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{G}(q, \omega) \cdot \tilde{f}(q, \omega) e^{iq \cdot \underline{r}} \\ &\stackrel{*}{=} \text{(bitte überprüfen)} \int d^3r' G(\underline{r} - \underline{r}', \omega) f(\underline{r}', \omega) \quad (3.107) \end{aligned}$$

\Rightarrow
*

$$\psi(\underline{r}, t) = \int d^3r' \int dt' G(\underline{r} - \underline{r}', t - t') f(\underline{r}', t') \quad (3.108)$$

* ist Konsequenz des Faltungstheorems für Fourier-Transformation.

$$\tilde{a}(\omega) = \tilde{b}(\omega)\tilde{c}(\omega) \Rightarrow a(t) = \int dt' b(t - t')c(t')$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{a}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \cdot \left(\int dt' e^{-i\omega t'} b(t') \right) \cdot \left(\int dt'' e^{-i\omega t''} c(t'') \right) \\ &= \int dt' \int dt'' b(t') c(t'') \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega(t'+t''-t)}}_{=\delta(t'+t''-t) \Rightarrow t' = t-t''} \\ &= \int dt'' b(t-t'') c(t'') \end{aligned} \quad (3.109)$$

(3.108) ist unmittelbar die Konsequenz der Gleichung (3.97) für die Greensfunktion G ; denn Einsetzen von (3.108) in Wellengleichung ergibt

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\underline{r}, t) &= \int d^3r' \int dt' \underbrace{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\underline{r} - \underline{r}', t - t')}_{=-4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')} f(\underline{r}', t') \\ &= -4\pi f(\underline{r}, t) \end{aligned} \quad (3.110)$$

Bemerkung:

Alle Greensfunktionen $G = a G^+ + b G^-$ mit $a + b = 1$ sind Lösungen von (3.97). Welche dieser Lösungen auszuwählen ist, hat man nach physikalischen Gesichtspunkten zu entscheiden.

Wenn die Welle ψ ausschließlich durch die angegebenen Quellen erzeugt wird (im kausalen Sinne), hat man die retardierte Lösung, $G = G^+$, zu nehmen. Da wegen der δ -Funktion in (3.106) die t' -Integration in (3.108) ausgeführt werden kann, lautet die retardierende Lösung der Wellengleichung (3.86)

$$\psi_{\text{ret}}(\underline{r}, t) = \int d^3r' \frac{f\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (3.111)$$

Hier erzeugt die Quelle f (Versuche) eine Wirkung ψ immer nur zu späteren Zeiten. Dieses Kausalitätsprinzip soll natürlich immer gelten.

Trotzdem gibt es Probleme, die mit der avancierten Greenschen Funktion zu lösen sind. Hat man etwa Quellen f zu Zeiten t mit $t_1 < t < t_2$ gegeben und die Wellen zu späteren Zeiten $\psi = \psi_{\text{aus}}(\underline{r}, t) (t \gg t_2)$, so erhält man folgende Lösung:

Zu ψ_{aus} gehört eine eindeutige Lösung der homogenen Wellengleichung für alle Zeiten, die wir auch ψ_{aus} nennen. (Wir werden die Lösungen der homogenen Wellengleichung später ausführlich behandeln). Die gesamte Lösung ist dann

$$\psi(\underline{r}, t) = \psi_{\text{aus}}(\underline{r}, t) + \int d^3r' \frac{f\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (3.112)$$

wobei $\int d^3r' \frac{f(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \psi_{\text{avanciert}}$

Der zweite (avancierte) Term gibt für $t > t_2$ keinen Beitrag. Schreibt man dies in der Form $\psi = (\psi_{\text{aus}} + \psi_{\text{avan}} - \psi_{\text{ret}} + \psi_{\text{ret}})$, so sieht es wieder kausal aus.

(wobei $(\psi_{\text{aus}} + \psi_{\text{avan}} - \psi_{\text{ret}}$ Lösung der homogenen Wellengleichung ist.)

3.5 Erhaltungssätze

In der Mechanik sind Energie, Impuls und Drehimpuls fundamentale Erhaltungsgrößen. Wir untersuchen hier die Gestalt der entsprechenden Erhaltungssätze in der Elektrodynamik.

Erinnerung an (3.51): Ein System von Ladungen ändert seine mechanische Energie dadurch, daß Ströme im elektrischen Feld Arbeit leisten. Gewinn an mechanischer Energie pro Zeiteinheit und Volumeneinheit:

$$\boxed{\underline{J}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r})} \quad (3.113)$$

Drücken \underline{J} durch elektro-magnetisches Feld aus:

$$\begin{aligned} -\underline{J} \cdot \underline{E} &= \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{E}} \cdot \underline{E} - \frac{c}{4\pi} \underline{E} \cdot \text{rot } \underline{B} \\ &= \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{E}} \cdot \underline{E} - \frac{c}{4\pi} \underbrace{\underline{B} \cdot \text{rot } \underline{E}}_{=-\frac{1}{c}\dot{\underline{B}}} + \frac{c}{4\pi} \text{div}(\underline{E} \times \underline{B}) \end{aligned} \quad (3.114)$$

⇒

$$\boxed{\underline{J} \cdot \underline{B} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) + \frac{c}{4\pi} \text{div}(\underline{E} \times \underline{B}) = 0} \quad (3.115)$$

Interpretation: Energieerhaltungssatz. Mit Kapitel 2 und (3.54) erhalten wir eine zeitliche Änderung der elektrischen und magnetischen Feldenergie-Dichte:

$$\boxed{u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)} \quad (3.116)$$

$\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{B})$ ist die Energiestromdichte

$$\underline{S}(\underline{r}) = \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B}) \quad (3.117)$$

Pointing-Vektor

mit

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = \int_V d^3r \underline{J} \cdot \underline{E}, \quad E_{\text{Feld}} = \int_V d^3r u(\underline{r}) \quad (3.118)$$

lautet der über ein beliebiges Volumen V integrierte Erhaltungssatz

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} + \frac{dE_{\text{Feld}}}{dt} + \oint_{\partial V} \underline{S} \cdot d\underline{f} = 0 \quad (3.119)$$

In Worten:

Änderung der mechanischen und der Feldenergie in V und der Energiefluß durch die Oberfläche von V halten sich die Waage.

Der Vektor der Energiestromdichte \underline{S} heißt auch Pointing-Vektor und der Erhaltungssatz Pointingscher Satz.

Bemerkung:

Elektrostatische Energie durch Arbeit von elektrischen Ladungen im elektrischen Feld. Magnetische Feldenergie durch Arbeit der Ströme in den vorübergehenden elektrischen Feldern beim Einschalten.

Der Unterschied (trotz Symmetrie der Maxwell-Gleichung in \underline{E} und \underline{B}) ist einzig auf Abwesenheit magnetischer Ladungen zurückzuführen. Insbesondere entsteht beim Einschalten elektrischer Felder auch ein vorübergehendes Magnetfeld, jedoch gibt es eben keine magnetischen Ströme, die in solchen Feldern Arbeit leisten könnten.

Impulsänderung eines Teilchens der Ladung q im Feld ist durch

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$$

gegeben. Summation über Teilchen in einem Volumenelement
 \Rightarrow Änderung der Dichte des mechanischen Impulses.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{\text{mech}}}{\partial t} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (3.120)$$

Wir ersetzen (wie oben) ρ und \mathbf{J} mittels Maxwell-Gleichung durch die Felder
 \Rightarrow

$$\left[\frac{\partial \mathbf{g}_{\text{mech}}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right]_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial \times \beta} T_{\beta\alpha} \quad (3.121)$$

mit

$$T_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left(E_{\alpha} E_{\beta} + B_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + B^2) \right) \quad (3.122)$$

Maxwellscher Spannungstensor

Interpretation:

$$\mathbf{g}_{\text{Feld}} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.123)$$

Impulsdichte des elektro-magnetischen Feldes

Paßt gut mit Bedeutung des Pointingvektors (3.117) als Energiestromdichte zusammen:

elektro-magnetische Strahlung ist aufgebaut aus Elementarteilchen und Photonen mit verschwindender Masse. \rightsquigarrow relativistische Mechanik. $E_{\text{kin}} = c \cdot |\underline{p}|$ ($|\underline{p}|$ ist Impuls, $E_{\text{kin}} = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2}$).

Strahlung bzw. Teilchen mit $m = 0$ bewegen sich mit Geschwindigkeit c .

Also

$$\underline{S} = c^2 \cdot \underline{g}_{\text{Feld}} \quad (3.124)$$

Die Impulsdichte \underline{g} trägt die Energiedichte $c\underline{g}$ mit sich, und zwar mit Lichtgeschwindigkeit! $c\underline{g}$ ist nicht Energiedichte, denn elektro-magnetische Energie muß sich nicht bewegen. Tatsächlich gilt $c\underline{g} \leq \frac{1}{4\pi} \underline{E} \underline{B} \leq \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = u$, nur ein Teil $c\underline{g}$ der Energiedichte bewegt sich.

Auf der rechten Seite von (3.121) steht die Divergenz eines Tensors 2.-ter Stufe, des Maxwell'schen Spannungstensors $T_{\alpha\beta}$. Dieser beschreibt die Änderung der Impulsdichte durch Fluß des Impulses (Stromdichte einer Vektorgröße muß Tensor sein).

Integrierte Form des Erhaltungssatzes (3.121):

$$\frac{d}{dt} (\underline{P}_{\text{mech}} + \underline{P}_{\text{Feld}})_{\alpha} = \oint \sum_{\beta} T_{\alpha\beta} n_{\beta} df \quad (3.125)$$

$\rightsquigarrow T_{\alpha\beta}$ ist β -Komponente der Stromdichte der α -Komponente des Feldimpulses. $T_{\alpha\beta}$ ist symmetrisch (\rightsquigarrow bekannte Konsequenzen). Nur div von \underline{I} (wie die div von \underline{S}) beobachtbar \Rightarrow weder \underline{I} (noch \underline{S}) aus Erhaltungssatz eindeutig bestimmbar.

Impulserhaltungssatz kann u.a. dazu verwendet werden, allein aus den Feldern die Kraft auf der Materie zu berechnen. Durch ähnliche Umformung wie oben kann man aus

$$\frac{\partial l_{\text{mech}}}{\partial t} = \underline{r} \times \left(\rho \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{J} \times \underline{B} \right)$$

(3.126)

für die Änderung der Drehimpulsdichte l_{mech} der Ladungen den Drehimpulserhaltungssatz

$$\left(\frac{\partial l_{\text{mech}}}{\partial t} + \frac{\partial l_{\text{Feld}}}{\partial t} \right)_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} M_{\beta\alpha} = 0$$

(3.127)

herleiten. Die Drehimpulsdichte des Feldes ist gegeben durch

$$l_{\text{Feld}} = \underline{r} \times \underline{g}_{\text{Feld}} = \frac{1}{4\pi c} \underline{r} \times (\underline{E} \times \underline{B})$$

(3.128)

und die Drehimpulsdichte

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta=1}^3 \epsilon_{\beta\gamma\delta} T_{\alpha\gamma} \times \delta$$

(3.129)

Dyadische oder Matrixschreibweise:

Tensordivergenzen $\nabla \cdot \underline{\underline{I}}$ oder $\nabla \cdot \underline{\underline{M}}$:

$$(\partial_x \partial_y \partial_z) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x T_{11} + \dots \\ \partial_x T_{21} + \dots \\ \partial_x T_{31} + \dots \end{pmatrix} \quad (3.130)$$

(3.129) schreibt sich dann

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{T}} \times \underline{r}$$

und die Integrale Drehimpulserhaltung ($\underline{L} = \int_V d^3r \underline{L}$)

$$\frac{d}{dt} (\underline{L}_{\text{mech}} + \underline{L}_{\text{Feld}}) + \oint \underline{n} \cdot \underline{M} df = 0 \quad (3.131)$$

Aus (3.122) folgt:

$$\underline{\underline{I}} = \frac{1}{4\pi} \left(\underline{E} \circ \underline{E} + \underline{B} \circ \underline{B} - \underline{\underline{1}} \cdot \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \right) \quad (3.132)$$

wobei $\underline{E} \circ \underline{E} = \text{Spalte} \circ \text{Zeile}$ bedeutet.

3.6 Strahlung

Aspekte der Erzeugung elektro-magnetischer Felder, speziell Wellen, durch bewegte Ladungen und Ströme.

3.6.1 Zeitlich periodische Quellen

$$\begin{aligned} J(\underline{r}, t) &= \underline{J}(\underline{r}) e^{-i\omega t} \\ \rho(\underline{r}, t) &= \rho(\underline{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.133)$$

Bemerkung:

Superpositionsprinzip läßt Betrachtung jeder einzelnen Mode ω separat zu. Wie üblich Realteil von (3.133) nehmen, um physikalische Größen zu erhalten.

⇒ Lorentzzeichnung

$$\begin{aligned}
 A(\underline{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \frac{J(\underline{r}', t')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3r' \underbrace{J(\underline{r}') \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\underline{r} - \underline{r}'|}}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{=:\underline{A}(\underline{r})} \cdot e^{-i\omega t}
 \end{aligned}
 \tag{3.134}$$

Man unterscheidet drei Längen:

- a) räumliche Ausdehnung d der Quellen
- b) Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$ der ausgesandten Strahlung
- c) Abstand r von der Quelle

Wichtiger Fall: $d \ll \lambda$ (Atome, Radiowellensender).

Weiterhin sind drei Zonen zu berücksichtigen:

- 1) Nahzone ($r \ll \lambda$)
- 2) Zwischenzone ($r \sim \lambda$)
- 3) Fernzone ($r \gg \lambda$)

Nahzone: $\frac{\omega}{c}|\underline{r} - \underline{r}'| \ll 1 \Rightarrow$ Exponentialfunktion in (3.134) entfällt. Felder dort sind die nicht-retardierten Felder, oszillieren nur.

Fernzone: $|\underline{r} - \underline{r}'| = r - \frac{r \cdot r'}{r} + 0(1/r)$

⇒

$$A(\underline{r}) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{cr} \int d^3r' J(\underline{r}') e^{i\frac{\omega}{c}(\underline{r}\cdot\underline{r}')/r} \quad (3.135)$$

wobei $\frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{cr}$ die auslaufende Kugelwelle, $J(\underline{r}')$ die Richtungsabhängigkeit bezeichnet.

Für $d \ll \lambda$: Entwickeln Exponentialfunktion in (3.135). Untersuchen ersten auftretenden Term.

$$\begin{aligned} \int d^3r' \underline{J}(\underline{r}') &= - \int d^3r' \underline{r}' (\nabla \cdot \underline{J}') \\ &= -i\omega \int d^3r' \underline{r}' \rho(\underline{r}') \\ &= -i\omega \underline{p} \text{ (bitte überprüfen)} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Mit

$$\frac{\omega}{c} = k$$

(3.137)

folgt

$$\underline{A}(\underline{r}) = -i k \underline{p} e^{ikr}/r$$

(3.138)

Berechnung der Felder, führenden Beitrag durch Diff. von e^{ikr} . \Rightarrow

$$\begin{aligned} \underline{B} &= k^2(\underline{r}/r \times \underline{p})e^{ikr}/r \\ \underline{E} &= \underline{B} \times \underline{r}/r \end{aligned} \quad (3.139)$$

Dipolstrahlung

Abgestrahlte Leistung:

Pointing-Vektor $\underline{S} = \frac{c}{4\pi}(\underline{E} \times \underline{B}) \leftarrow$ benutze für \underline{E} und \underline{B} reelle Felder.

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \frac{k^2}{r} \underline{r} \times (Rc \underline{p} \cos(kr - \omega t) - Im \underline{p} \sin(kr - \omega t))$$

Analog $\underline{E}(\underline{r}, t)$.

Zeitlich ermittelte Leistung:

$$\left(\overline{\cos^2(kr - \omega t)} = \overline{\sin^2(kr - \omega t)} = \frac{1}{2}, \overline{\sin^2(kr - \omega t)} = 0 \right)$$

pro Raumwinkel (Leistungsdichte auf Einheitskugel).

$$p(\Omega) = \frac{c}{8\pi} Re[r \cdot \underline{r} \cdot (\underline{E} \times \underline{B}^*)] \quad (3.140)$$

mit \underline{E} und \underline{B} aus (3.139).

Mit

$$\{[(\underline{r} \times \underline{p}) \times \underline{r}] \times (\underline{r} \times \underline{p}^*)\} \cdot \underline{r} = [(\underline{r} \times \underline{p}) \times \underline{r}] \cdot [(\underline{r} \times \underline{p}^*) \times \underline{r}] \text{ i.e. } ((\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}))$$

folgt

$$p(\Omega) = \frac{c}{8\pi} k^4 |(\underline{n} \times \underline{p}) \times \underline{n}|^2 \quad (3.141)$$

$$\underline{n} = \underline{r}/r$$

Wegen $|(\underline{n} \times \underline{p}) \times \underline{n}|^2 = |\underline{p} - \underline{n}(\underline{n} \cdot \underline{p})|^2 = |\underline{p}|^2 - |(\underline{n} \cdot \underline{p})|^2$ erhält man für die gesamte abgestimmte Leistung

$$p_{\text{total}} = \int d\Omega A(\Omega) = \frac{ck^4}{3} |\underline{p}|^2 \quad (3.142)$$

Beispiel für elektrische Dipolstrahlen: Linearantenne mit symmetrischer Speisung

$$I(z)e^{-i\omega t} = I_0 \cdot \left(1 - \frac{Z|z|}{d}\right) e^{-i\omega t} \quad (3.143)$$

Skizze fehlt!

Kontinuitätsgleichung: Linienladungsdichte p' (Ladung pro Längeneinheit) entlang beider Antennenarme: $\rho'(z) = \pm \frac{ZiI_0}{\omega d}$, (+: positive z -Werte, - negative z -Werte).

Dipolmoment parallel zur z -Achse

$$p = \int_{-d/z}^{d/z} dz z \rho'(z) = \frac{iI_0 d}{2\omega} \quad (3.144)$$

\Rightarrow Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung $\frac{dp}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{32\pi c} (kd)^2 \sin^2$

Gesamtstrahlungsleistung $p = \frac{I_0^2 (kd)^2}{12c}$ (kd ist quadratisch in der Frequenz.)

3.6.2 Vorgeschriebene Trajektorie

Wir untersuchen nun (Punkt)-Teilchen der Ladung e auf vorgeschriebener Trajektorien $\underline{r}_0(t)$:

$$\begin{aligned} \rho(\underline{r}, t) &= e \delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t)) \\ \underline{J}(\underline{r}, t) &= e \underline{v}(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t)), \quad \underline{v} = \dot{\underline{r}}_0 \end{aligned} \quad (3.145)$$

Also retardierte Potentiale:

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{r}, t) &= e \int dt' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_0(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_0(t')|}{c}\right) \\ \underline{A}(\underline{r}, t) &= \frac{e}{c} \int dt' \frac{\dot{\underline{r}}(t')}{|\underline{r} - \underline{r}_0(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_0(t')|}{c}\right) \end{aligned} \quad (3.146)$$

Wegen

$$\delta(f(t)) = \frac{1}{|f'(t_0)|} \delta(t - t_0) \quad (3.147)$$

mit $f(t_0) = 0$ ist

$$\begin{aligned} &\delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_0(t')|}{c}\right) \\ &= \delta(t' - t_0(t, \underline{r})) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\underline{r} - \underline{r}_0}{|\underline{r} - \underline{r}_0|} \frac{v_0}{c}} \end{aligned} \quad (3.148)$$

wobei

$$t_0 + \frac{|\underline{r} - \underline{r}_0(t_0)|}{c} = t$$

implizit $d \cdot f$. (bitte überprüfen)

Einsetzen von (3.148) in (3.146) ergibt die Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\left(\underline{n} = \frac{\underline{r} - \underline{r}_0(t_0)}{|\underline{r} - \underline{r}_0(t_0)|} \right)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{r}, t) &= e \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_0(t_0)|(1 - \underline{n} \cdot \underline{v}_0(t_0)/c)} \\ \underline{A}(\underline{r}, t) &= \frac{e}{c} \frac{\underline{v}_0(t_0)}{|\underline{r} - \underline{r}_0(t_0)|(1 - \underline{n} \cdot \underline{v}_0(t_0)/c)} \end{aligned} \quad (3.149)$$

Gestatten Berechnung der von den Teilchen emittierten Strahlung (Lorentz-Eichung).

Beispiel: Hertzscher Dipol:

Paar von Punktladungen $\overset{+}{-} e$, Abstand $\underline{r}_0 = \underline{r}_0(t)$. \Rightarrow Dipolmoment

$$\begin{aligned} \underline{p}(t) &= -e \underline{r}_0(t) \\ \text{und } \underline{e}\underline{v}(t) &= -e \frac{\dot{\underline{r}}_0(t)}{2} + e \frac{-\dot{\underline{r}}_0(t)}{2} = \dot{\underline{p}}(t) \end{aligned}$$

Definition:

$$\Delta \underline{r}^-(t') := \underline{r} - \frac{\underline{r}_0(t')}{2}, \quad \Delta \underline{r}^+(t') := \underline{r} + \frac{\underline{r}_0(t')}{2} \quad (3.150)$$

\Rightarrow mit

$$\begin{aligned} R^+(t) &= \frac{1}{|\Delta \underline{r}^+(t')| - \Delta \underline{r}^+(t') \cdot \frac{\overset{+}{-}\dot{\underline{r}}_0(t')}{2c}} \Bigg|_{t' = t - \frac{|\Delta \underline{r}^+(t')|}{c}} \\ \Phi(\underline{r}, t) &= -e R^-(t) + e R^+(t) \\ \underline{A}(\underline{r}, t) &= -\frac{e}{c} \frac{\dot{\underline{r}}_0(t')}{2} R^-(t) + \frac{e}{c} \frac{-\dot{\underline{r}}_0(t')}{2} \Bigg|_{t' = t - \frac{|\Delta \underline{r}^+(t')|}{c}} \end{aligned} \quad (3.151)$$

Näherung:

- 1) Ausdehnung $|\underline{r}_0|$ des Dipols klein gegen Abstandsvektor $|\underline{r}|$ $|\underline{r}_0| \ll |\underline{r}|$
 $\Rightarrow \Delta \underline{r}^+(t') \approx \underline{r}$
- 2) Wellenlänge λ klein gegen Maximalausdehnung $|r_0^{\max}| \Rightarrow \frac{v}{c} \approx \frac{2r_0^{\max}}{Tc} =$
 $\frac{r_0^{\max} \omega}{\pi c} = \frac{2r_0^{\max}}{\lambda} \ll 1$

\Rightarrow

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = -\frac{e}{c} \frac{\dot{\underline{r}}_0(t')}{|\underline{r}|} = \frac{\dot{\underline{p}}(t')}{cr} \Big|_{t' = t - \frac{r}{c}} = \frac{\dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \quad (3.152)$$

unter Vernachlässigung quadratischer Terme in $\frac{v}{c}$.
 Lorentz-Eichung:

$$\operatorname{div} \underline{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \quad (3.153)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{r}, t) &= -\nabla \cdot \int dt \frac{\dot{\underline{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} = -\nabla \cdot \frac{\underline{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \\ &= \frac{\dot{\underline{p}} \cdot \underline{r}}{cr^2} + \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Nahzone $r \ll \lambda \Rightarrow \Phi = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3}$ bekanntes (statisches) Dipolpotential.
 \Rightarrow Retardierung vernachlässigbar.

Fernzone: Der zweite Term geht schneller nach Null ($\sim 1/r^2$) \Rightarrow vernachl.
 Einsetzen der Pot. in Felder:

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \nabla \Phi = -\frac{\ddot{\underline{p}}}{c^2 r} - \frac{\dot{\underline{p}}}{cr^2} + \frac{3(\dot{\underline{p}} \cdot \underline{r})\underline{r}}{cr^4} + \frac{(\ddot{\underline{p}} \cdot \underline{r})\underline{r}}{c^2 r^3} + \frac{3(\underline{r} \cdot \underline{p})\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{p}}{r^3} \\ &\quad \Phi \sim \frac{\dot{\underline{p}} \cdot \underline{r}}{cr^2} \propto \frac{1}{r} \\ \underline{B} &= \operatorname{pot} \underline{A} = \frac{\ddot{\underline{p}} \times \underline{r}}{c^2 r^2} + \frac{\dot{\underline{p}} \times \underline{r}}{cr^3} \end{aligned} \quad (3.155)$$

Nahzone: ($r \ll \lambda$): Hohe Potenzen im Nenner dominant

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \frac{3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{p}}{r^3} \\ \underline{B} &= \frac{\dot{\underline{p}} \times \underline{r}}{cr^3} \end{aligned} \quad (3.156)$$

= stat. Dipol

Fernzone: ($r \gg \lambda$): Hohe Potenzen im Nenner vernachlässigt

$$\begin{aligned} \underline{E} &= -\frac{\ddot{\underline{p}}}{c^2 r} + \frac{(\ddot{\underline{p}} \cdot \underline{r})\underline{r}}{c^2 r^3} = \frac{1}{c^2 r^3} (\ddot{\underline{p}} \times \underline{r}) \times \underline{r} \\ \underline{B} &= \frac{\ddot{\underline{p}} \times \underline{r}}{c^2 r^2} \end{aligned} \quad (3.157)$$

$\Rightarrow (\underline{r}, \underline{E}, \underline{B})$ bilden in Fernzone ein Orthogonalsystem, und \underline{E} und \underline{B} haben den gleichen Betrag

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r} \\ \underline{B} &= -\underline{E} \times \frac{\underline{r}}{r} \end{aligned} \quad (3.158)$$

3.6.3 Pointingvektor des Dipolfeldes

Fernzone:

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} (\underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r}) \times \underline{B} = \frac{c}{4\pi} (\underline{B} \cdot \underline{B}) \frac{\underline{r}}{r} - \frac{c}{4\pi} (B \cdot \frac{\underline{r}}{r}) \underline{B} \quad (3.159)$$

wegen $\underline{B} \perp \underline{r}$ ist $\underline{B} \cdot \underline{r} = 0 = \frac{c}{4\pi} \frac{(\ddot{\underline{p}} \times \underline{r})^2}{c^4 r^4} \frac{\underline{r}}{r}$

Also

$$\underline{S} = \frac{|\ddot{\underline{p}}|^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \vartheta \quad (3.160)$$

$\propto \frac{1}{r^2}$ in Fernzone, wichtig für Energieerhaltung.

$\vartheta = 0, \pi$: $\underline{S} = 0$: Dipol strahlt in Schwingungsrichtung nicht!

$\ddot{\underline{p}} = 0 \Rightarrow \underline{S} = 0$ d.h. ohne Beschleunigung keine Energieabstrahlung \longleftrightarrow Bremsstrahlung.

Nahzone:

$$\begin{aligned} \underline{S} = \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B}) &= \frac{c}{4\pi} \left(\frac{3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{p}}{r^3} \right) \times \frac{\dot{\underline{p}} \times \underline{r}}{cr^3} \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} (3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 \underline{p}) \times (\dot{\underline{p}} \times \underline{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} (3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r} \times (\dot{\underline{p}} \times \underline{r}) - r^2 \underline{p} \times (\dot{\underline{p}} \times \underline{r})) \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} \{ 3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r} (r^2 \dot{\underline{p}} - (\underline{r} \cdot \underline{p})\underline{r}) - (r^2 (\underline{r} \cdot \underline{p})\dot{\underline{p}} - (\underline{p} \cdot \dot{\underline{p}})\underline{r}) \} \\ &= \frac{1}{4\pi r^8} \{ 2(\underline{p} \cdot \underline{r})r^2 \dot{\underline{p}} - p\dot{p}r^2 (3 \cos \vartheta + 1)\underline{r} \} \end{aligned} \quad (3.161)$$

Komplizierteres Verhalten als im Fernfeld

Gesamtbetrag der abgestrahlten Energie pro Zeit \longrightarrow Fernfeld:

Mittlere Energie der Strahlung, die der Dipol während einer Schwingungsdauer T durch große Kugel mit Radius R abstrahlt:

$$E = \frac{1}{T} \iint S_R R^2 d\Omega = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\ddot{p}^2}{4c^3 \pi} \sin \vartheta \sin \vartheta d\varphi = \frac{2}{3c^3 T} \underbrace{\int_0^T \ddot{p} dt}_{=\ddot{p}(t-\frac{r}{c})} \quad (3.162)$$

Für harmonische Schwingung:

$$p = p_0 \sin \omega(t - \frac{r}{c}) \implies E = \frac{a^4 p_0^2 T}{3c^3 T} \underbrace{=}_{\omega = \frac{2\pi}{T}, cT=3} \frac{16}{3} \frac{\pi^4 c p_0^2}{\lambda^4} \quad (3.163)$$

\implies Wieder $\propto a^4$

3.6.4 Elektrostatik in Materie (dichte Medien)

\underline{E} = gemittelt, makroskopisches elektrisches Feld

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0 \implies \exists \Phi : \underline{E} = \underline{\nabla} \Phi$$

elektrisches Feld verzerrt Moleküle, Atome \implies Multipolmomente ändern sich

Dominierenden Multipol: Dipol \implies es entsteht elektrische Polarisation \underline{P} (Dipolmoment pro Volumeneinheit)

$$\underline{P}(\underline{r}) = \sum_i N_i \langle p_i \rangle \quad (3.164)$$

wobei N_i die mittlere Anzahl der Moleküle des i -ten Typs pro Volumenelement und p_i das Dipolmoment der i -ten Molekülart im betrachteten Medium bezeichnet.

$$\rho(\underline{r}) = \sum_i N_i \langle e_i \rangle + \rho_{\text{frei}} \quad (3.165)$$

$$s\varphi(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \Delta V + \frac{P(\underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \Delta V \quad (3.166)$$

\implies

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{r}) &= \int d^3r' \Delta \varphi(\underline{r}, \underline{r}') = \int d^3r' \left\{ \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + P(\underline{r}') \underline{\nabla}' \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) \right\} \\ &= \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \{ \rho(\underline{r}') - \underline{\nabla}' P(\underline{r}') \} \end{aligned} \quad (3.167)$$

entspricht Pot. einer Ladungsverteilung $\rho - \underline{\nabla} \cdot \underline{P} \implies$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 4\pi \left(\rho - \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{P}}_{\text{Polarisationsladung}} \right) \quad (3.168)$$

mit

$$D := \underline{E} + 4\pi \underline{P} \quad (3.169)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{D} = 4\pi \rho$$

3.6.5 Magnetostatik in Materie

$\nabla \cdot \underline{B} = 0$ für gemittelte magnetische Induktion

Moleküle besitzen magnetisches Moment \Rightarrow makroskopische Magnetisierung bzw. magnetische Momentdichte

$$\underline{M}(\underline{r}) = \sum_i N_i \langle m_i \rangle \quad (3.170)$$

wobei N_i die mittlere Anzahl von Molekülen des Typs i pro Volumeneinheit und m_i das mittlere molekulare Moment eines kleinen Volumens bezeichnet.

Wie in der Elektrostatik:

$$\Delta A(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{\underline{J}(\underline{r}')}{c|\underline{r} - \underline{r}'|} \Delta V + \frac{\underline{M}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \Delta V \quad (3.171)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} A(\underline{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \left\{ \frac{\underline{J}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \underbrace{\frac{c \underline{M}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}}_{= \underline{M}(\underline{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}} \right\} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \left\{ \underline{J}(\underline{r}') + \underbrace{c \nabla' \times \underline{M}(\underline{r}')}_{=: J_M \text{ effektive Stromdichte}} \right\} \end{aligned} \quad (3.172)$$

Damit Äquivalent der mikroskopischen Gleichung $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + 4\pi \nabla \times \underline{M} \quad (3.173)$$

Definition:

Magnetisches Feld:

$$\underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M} \Rightarrow \nabla \times \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}$$

(3.174)

Kapitel 4

Elektrodynamik in Materie

4.1 Maxwellgleichungen in Materie

Anwesenheit von Materie \leftarrow Ströme und Ladungen innerhalb dieser Materie (abhängig von Beschaffenheit, Temperatur, auch von \underline{B} und \underline{E}).

Atomistische Vorstellung von Materie: aufgebaut aus geladenen Elementarteilchen, Felder beeinflussen deren Bewegung.

Reaktion der Materie auf elektromagnetische Felder (atomistische Beschreibung durch quantenstatistische Theorie der Materie) \Leftarrow Theorie der Materie sprengt den Rahmen der Maxwellschen Theorie.

Umgebung bzw. Abtrennung einer Theorie der (kondensierten) Materie von M.-Theorie durch phänomenologische Maxwellgleichungen in Materie.

Zerlegen Ladungen und Ströme in je zwei Anteile

$$\begin{aligned} \rho(\underline{r}, t) &= \rho^{\text{ex}}(\underline{r}, t) + \rho^{\text{mat}}(\underline{r}, t) \\ \underline{J}(\underline{r}, t) &= \underline{J}^{\text{ex}}(\underline{r}, t) + \underline{J}^{\text{mat}}(\underline{r}, t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

ex bezeichnet extreme Anteile, i.a. außerhalb der betrachteten Materie, manipulierbar.

mat bezeichnet innere Anteile, i.a. nicht manipulierbar, Reaktion der Materie
 Zerlegung nicht eindeutig, kann der jeweiligen Fragestellung angepaßt werden
 (D...-Metall)

Verwenden ρ^{mat} und $\underline{J}^{\text{mat}}$ zur Definition einer

Polarisierungsdichte \underline{P} und Magnetisierungsdichte \underline{M} .

\underline{P} und $\underline{M} = 0$ außerhalb Materie, die ρ^{mat} und $\underline{J}^{\text{mat}}$ trägt.

Beachte: ρ^{mat} und $\underline{J}^{\text{mat}}$ genügen (wie ρ und \underline{J}) Kontinuitätsgleichung.

$$\frac{\partial \rho^{\text{mat}}}{\partial t} + \text{div} \underline{J}^{\text{mat}} = 0 \quad (4.2)$$

Zur Konstruktion von \underline{P} und \underline{M} : Unterscheide zwischen stationären und fluktuierenden Anteilen

$$X(t) = X_{\text{stat}} + X_{\text{fluk}}(t) \quad (4.3)$$

wobei X_{stat} zeitl. Mitteln. und X_{fluk} zeitl. Mittel verschw. ist und beide Anteile außerhalb Materie verschwinden!

Fouriertransformation:

$$\tilde{X}(\omega) = 2\pi X_{\text{stat}} \delta(\omega) + \tilde{X}_{\text{fluk}}(\omega) \quad (4.4)$$

\Rightarrow (4.2) FT:

$$-i\omega \tilde{\rho}^{\text{mat}}(\omega) + \text{div} \tilde{\underline{J}}^{\text{mat}}(\omega) = 0 \quad (4.5)$$

Definition: zunächst $\underline{P}_{\text{fluk}}(t)$ durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{P}_{\text{fluk}}(t) = \underline{J}_{\text{fluk}}^{\text{mat}}(t) \quad (4.6)$$

oder

$$-i\omega \tilde{\underline{P}}_{\text{fluk}} = \tilde{\underline{J}}_{\text{fluk}}^{\text{mat}}$$

legt $\underline{P}_{\text{fluk}}$ eindeutig fest, verschwindet außerhalb Materie.

Wegen (4.2) und (4.1) gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{P}_{\text{fluk}} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \underline{P}_{\text{fluk}} \quad (4.7)$$

oder

$$-i\omega \tilde{\rho}_{\text{fluk}}^{\text{mat}} = -i\omega \tilde{\underline{P}}_{\text{fluk}} \quad (4.8)$$

\Rightarrow

$$\text{div} \underline{P}_{\text{fluk}} = -\rho_{\text{fluk}}^{\text{mat}} \quad (4.9)$$

(Beachte Ähnlichkeit mit Maxwell-Gleichung $\text{div} \underline{E} = 4\pi\rho$, aber i.a. $\text{rot} \underline{P}_{\text{fluk}} \neq 0$).

Wir betrachten nun stationäre Anteile von ρ^{mat} und $\underline{J}^{\text{mat}}$. Auch hier streben wir an

$$\text{div} \underline{P}_{\text{stat}} = -\rho_{\text{stat}}^{\text{mat}} \quad (4.10)$$

Wegen $\underline{P} = 0$ außerhalb der Materie muß $Q^{\text{mat}} = \int d^3r \rho_{\text{stat}}^{\text{mat}} = 0$ sein auf jedem zusammenhängenden Materiestück.

\rightsquigarrow können keine Gleichung analog zu (4.6) fordern, ρ_{stat} und $\underline{J}_{\text{stat}}$ sind völlig unabhängig. Wegen $\text{div } \underline{J}_{\text{stat}}^{\text{mat}} = 0$ fordern wir stattdessen

Definition von \underline{M} :

$$c \text{ rot } \underline{M} = \underline{J}_{\text{stat}}^{\text{mat}} \quad (4.11)$$

Die so definierte Magnetisierungsdichte \underline{M} ist rein stationär.

Oft wird man gewisse Teile von $\underline{J}_{\text{stat}}^{\text{fluk}}$ (s. später) lieber durch eine Magnetisierung statt durch eine Polarisierung beschreiben.

\rightsquigarrow Entferne entsprechende div-freie Anteile aus $\underline{J}_{\text{stat}}^{\text{fluk}}$ in (4.6) (beachte: davon wird (4.9) nicht berührt) und füge sie zur rechten Seite von (4.11) hinzu.

Lösbarkeit von (4.10) und (4.11):

Dazu notwendig sind

$$Q^{\text{mat}} = 0, \text{ div } \underline{J}_{\text{stat}}^{\text{mat}} = 0 \quad (4.12)$$

Physikalische Bed. von \underline{P} bzw. \underline{M} :

Dichte elektrischer bzw. magnetischer Dipolmomente

Hierzu: Dipoldichten \underline{P} bzw. \underline{M} erzeugen dasselbe Potential φ bzw. \underline{A} wie die Ladungsdichte $\rho_P := -\text{div } \underline{J}$ bzw. die Stromdichte $\underline{J}_M = c \text{ rot } \underline{M}$.

Dipolmoment $\underline{p} = \underline{P}(\underline{r}') \cdot \Delta v$ im Volumenelement Δv am Punkt \underline{r}' erzeugt bei \underline{r} elektrostatisches Potential

$$\varphi_{\underline{r}'}(\underline{r}) = \frac{\underline{p} \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} = \underline{P}(\underline{r}') \cdot \Delta v \cdot \nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad (4.13)$$

⇒ Gesamtpotential

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{r}) &= \int d^3r' \underbrace{\underline{P}(\underline{r}') \cdot \left(\nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right)}_{\nabla' \cdot \left(\frac{\underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) - \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')} \\ &= - \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \int d^3r' \frac{\rho_p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\end{aligned}\quad (4.14)$$

da $\underline{P} = 0$ außerhalb der Materie.

Analog erzeugt Dipolmoment $\underline{m} = \underline{M}(\underline{r}')\Delta v$ das Vektorpotential

$$\begin{aligned}\underline{A}(\underline{r}) &= \int d^3r' \underbrace{\underline{M}(\underline{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right)}_{\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} (\nabla' \times \underline{M}(\underline{r}') - \nabla' \times \left(\frac{\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right)} \\ &= \int d^3r' \frac{\nabla' \times \underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\underline{J}_M(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\end{aligned}\quad (4.15)$$

da $\underline{M} = 0$ außerhalb der Materie.

Damit Bed. der Lösung von (4.10) und (4.11) geklärt.

Heuristische Konstruktionsvorschrift:

Jede Ladungsverteilung $\rho_{\text{stat}}^{\text{mat}}$ mit der Eigenschaft (4.12) kann aus lauter Dipolpaaren aufgebaut werden ⇒ \underline{P} . Jede div-freie Stromdichte $\underline{J}_{\text{stat}}^{\text{mat}}$ (4.12) kann aus lauter kleinen Kreisströmen aufgebaut werden. ⇒ \underline{M} (Ampèresche Molekularströme)

Fassen fluktuierende und stationäre Anteile zusammen:

$$\boxed{\rho^{\text{mat}} = -\text{div } \underline{P}, \quad \underline{J}^{\text{mat}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{P} + c \text{ rot } \underline{M}}\quad (4.16)$$

Eingesetzt in inhomogene Maxwellgleichung:

$$\begin{aligned}\text{div } \underline{E} &= 4\pi(\rho^{\text{ex}} + \rho^{\text{mat}}) = 4\pi\rho^{\text{ex}} - 4\pi \text{ div } \underline{P} \\ \text{rot } \underline{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} &= \frac{4\pi}{c}(\underline{J}^{\text{ex}} + \underline{J}^{\text{mat}}) = \frac{4\pi}{c} \underline{J}^{\text{ex}} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{P} + 4\pi \text{ rot } \underline{M}\end{aligned}\quad (4.17)$$

\underline{P} und \underline{M} sind so definiert, daß sie sich leicht mit \underline{E} und \underline{B} zusammenfassen lassen. Dabei entstehen die Kombinationen

$$\underline{D} = \underline{E} + 4\pi\underline{P} \quad (4.18)$$

\underline{D} = Dielektrische Verschiebung

und

$$\underline{H} = \underline{B} - 4\pi\underline{M} \quad (4.19)$$

\underline{H} = magnetische Feldstärke und \underline{B} = magnetische Induktion

⇒ inhomogene Maxwellgleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{D} &= 4\pi\rho^{\text{ex}} \\ \operatorname{rot} \underline{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} &= \frac{4\pi}{c} \underline{J}^{\text{ex}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Außerhalb Materie:

$$\underline{D} = \underline{E}, \quad \underline{H} = \underline{B} \quad (4.21)$$

Zusammenhang zwischen $\underline{D}, \underline{H}$ und $\underline{E}, \underline{B}$ in der Materie wird durch Eigenschaften der Materie bestimmt ← Theorie der Materie

Einfachster, aber mit Abstand wichtigster Fall:

Materie reagiert linear auf die Felder \underline{E} und \underline{B} . Reaktion der Materie durch lineare elektrische bzw. magnetische Suszeptibilität beschreibbar.

Homogene (d.h. translationsinvariante) Medien: allgemeinsten Zusammenhang

$$\begin{aligned} \underline{P}(\underline{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \underline{\chi}^{\text{el}}(\underline{r} - \underline{r}', t - t') \underline{E}(\underline{r}', t') \\ \underline{M} &= \underline{\chi}^{\text{mag}} \underline{H} \end{aligned} \quad (4.22)$$

enthält

- a) Möglichkeit der Anisotropie (bei Kristallen oder fl. Kristallen).
- b) zeitliche Retardierung (immer $\mathcal{X} = 0$ für $t < t'$). Werden sehen: äquivalent einer Frequenzabhängigkeit von \mathcal{X} .
- c) räumliche Nichtlokalität ($\underline{r}' \neq \underline{r}$) \implies Abhängigkeit von \mathcal{X} von der Wellenlänge oder Wellenzahl.

Zeitliche und räumliche Fourier-Transformation, z.B.

$$\tilde{\underline{P}}(q, \omega) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt \underline{P}(\underline{r}, t) e^{i(\omega t - q \cdot r)} \quad (4.23)$$

Wegen Translationsinvarianz des Mediums in t und \underline{r}

$$(4.22) \xrightarrow{\text{Faltungstheorem}} \tilde{\underline{P}}(q, \omega) = \underline{\tilde{\chi}}^{\text{el}}(q, \omega) \cdot \tilde{\underline{E}}(q, \omega) \quad (4.24)$$

d.h. für Fourier-Transformation ist lineare Reaktion einfach multiplikativ.

Natur der (\underline{r}, t) bzw. (q, ω) -Abhängigkeit von \mathcal{X} anhand eines atomaren Modells der Materie leicht verstehbar:

Das \underline{E} -Feld bei \underline{r}' beeinflusst die Bewegung der Elektronen am Ort \underline{r} . Der Einfluß erstreckt sich aufgrund der Bewegung der Elektronen über ein ganzes Atom oder Molekül.

\Rightarrow Polarisation bis \underline{r} beeinflusst mit $|\underline{r} - \underline{r}'|$ einige atomare Längen.
 $\Rightarrow \mathcal{X}(\underline{r} - \underline{r}')$ nimmt stark ab, sobald $|\underline{r} - \underline{r}'| >$ als atomare Längen.
 Entsprechend $\tilde{\mathcal{X}}(q)$, sobald $|q| < 1/\text{einige Atomdurchm.}$

Da Licht eine Wellenlänge von einigen tausend Atomdurchmessern besitzt, wird man für Licht praktisch $q = \underline{0}$ setzen können.

Analog: typische Retardierungszeiten mit atomarer Schwingungsdauer zu vergleichen.

$\Rightarrow \mathcal{X}$ ändert sich drastisch mit der Frequenz ω , sobald ω die Größenordnung atomarer oder molekularer Frequenzen erreicht.

\leadsto Suszeptibilität für Licht nicht gleich der statischen ($\omega = 0$) Suszeptibilität, da im Infraroten molekulare oder kristalline Schwingungsfrequenzen liegen.

Im folgenden werden wir \sim in den Gleichungen weglassen - aber es ist stets eine Fourierzerlegung gemeint. (z.B. \underline{E} ist $\underline{E}(r, t) = \tilde{E}(q, \omega) e^{i(q\underline{r} - \omega t)}$ gemeint, also eine bestimmte Fourier-Komp. des Feldes).

Definition: Dielektrische Funktion ϵ

$$\underline{D} = \underline{\epsilon}(q, \omega) \underline{E} \quad (4.25)$$

Wegen (4.18) und (4.24) ergibt sich

$$\underline{\epsilon}(q, \omega) = \underline{1} + 4\pi \underline{\mathcal{X}}^{\text{el}}(q, \omega) \quad (4.26)$$

Man kann die lineare Reaktion der Materie auch durch ein

verallgemeinertes Ohmsches Gesetz ausdrücken:

$$\underline{J}^{\text{mat}} = \underline{\underline{\sigma}}(q, \omega) \underline{E} \quad (4.27)$$

dynamische Leitfähigkeit

Mit (4.6) [$\dot{\underline{P}}_{\text{fluk}} = \underline{J}_{\text{fluk}}^{\text{mat}}$] :

$$\underline{\underline{\sigma}}(q, \omega) = -i\omega \underline{\underline{\chi}}^{\text{el}}(q, \omega) \quad (4.28)$$

Definition: magnetische Permeabilität:

$$\underline{B} = \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H} \quad (4.29)$$

Mit (4.19) und (4.22) [$\underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M}$, $\underline{M} = \underline{\underline{\chi}}^{\text{mag}} \underline{H}$] folgt

$$\underline{\underline{\mu}} = \underline{1} + 4\pi \underline{\underline{\chi}}^{\text{mag}} \quad (4.30)$$

Beachte verschiedene Behandlung elektrischer und magnetischer Felder bei der Definition von $\underline{\underline{\chi}}$ und von ϵ und μ ! Es ist nicht $\underline{M} = \underline{\underline{\chi}}^{\text{mag}} \underline{B}$ wie in $\underline{P} = \underline{\underline{\chi}}^{\text{el}} \underline{E}$.

Durch diese (üblichen) Definitionen wird die Beschreibung dielektrischer und magnetischer Phänomene um vieles analoger. Grund: Maxwell-Gleichungen für \underline{E} und \underline{H} geben Wirbel an, während sie für \underline{D} und \underline{B} die Quellen nennen.

4.1.1 Randbedingungen (in Materie)

Aus der Vakuum-Elektro-Dynamik kennen wir Stetigkeits- und Sprungbedingungen für die Felder \underline{E} und \underline{B} an Grenzflächen (siehe Kapitel I und II). In Materie sind einige dieser Bedingungen zu modifizieren.

(1)

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}} \implies \oint_L \underline{E} \cdot d\underline{r} = -\frac{1}{c} \iint_F \dot{\underline{B}} \cdot d\underline{f}$$

$\underline{a} \rightarrow 0, \underline{l} \xrightarrow{\text{infinitesimal klein}}$ $\underline{l} \cdot (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) = F \cdot B \rightarrow 0$, da \underline{B} beschränkt, keine δ -Zacken!

 \implies

$$\boxed{E_{\text{tang}} \text{ stetig}} \quad (4.31)$$

(2)

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \implies \oiint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0 = (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) \cdot \underline{F}$$

 \implies

$$\boxed{B_{\text{normal}} \text{ stetig}} \quad (4.32)$$

(3)

$$\operatorname{div} \underline{D} = 4\pi \rho^{\text{ex}}$$

 \implies

$$\boxed{(\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{n} = 4\pi \sigma^{\text{ex}}} \quad (4.33)$$

Bedeutet in vielen Anwendungen, daß $\boxed{D_{\text{normal}} \text{ stetig}}$, da $\sigma^{\text{ex}} = 0$ aber meist $\sigma^{\text{mat}} \neq 0$.

(4)

$$\operatorname{rot} \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}^{\text{ex}} + \frac{1}{c} \dot{\underline{D}} \implies \oint_L \underline{H} \cdot d\underline{r} = \frac{4\pi}{c} \underline{I}^{\text{ex}} + \frac{1}{c} \iint_F \dot{\underline{D}} \cdot d\underline{f}$$

Hier ist Vorsicht geboten!

Man erhält Ergebnis analog zum Vakuum ($\underline{n} \times (\underline{B}_2 - \underline{B}_1) = \frac{4\pi}{c} \underline{K}$) nur dann, wenn für $a \rightarrow 0$ der Fluß $\iint_F \dot{\underline{D}} \cdot d\underline{f}$ des Verschiebungsfeldes verschwindet. Dazu darf die Polarisierung \underline{P} keine Oberflächenbeiträge haben.

Die Zerlegung $\underline{J}^{\text{mat}} = \underline{J}^{\text{pol}} + \underline{J}^{\text{mag}}$ ($\operatorname{div} \underline{J}^{\text{mag}} = 0$) muß also derart sein, daß $\underline{J}^{\text{pol}}$ keine Oberflächenströme enthält. Dann bekommt auch \underline{P} ($\dot{\underline{P}} = \underline{J}^{\text{pol}}$) keine δ -Zacken an der Oberfläche.

Unter diesen Bedingungen:

$$\underline{n} \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \underline{K}^{\text{ex}} \quad (4.34)$$

bedeutet oft

$$H_{\text{tang}} \text{ stetig} \quad (4.35)$$

4.1.2 Randwertprobleme

Zusammen mit der Materialgleichung (4.25) und (4.29) gestatten die Maxwell-Gleichungen (4.20) und (4.21) und die homogenen Gleichungen (3.64, b und c) die Bestimmung der Felder bei vorgegebenen externen Quellen.

Auch die Lösungen von Randwertproblemen, bei denen Teile dieser Quellen durch Randwerte ersetzt werden, ist durch diesen Satz von Gleichungen bestimmt.

Wir diskutieren das Prinzip der Lösungen kurz anhand der Probleme einer dielektrischen Kugel im homogenen Feld und einer para- oder diamagnetischen Kugel im homogenen magnetischen Feld.

Wegen $\text{rot } \underline{E} = \underline{0} \quad \exists \varphi : \underline{E} = \nabla \varphi$

Außerhalb Kugel: $\underline{D} = \underline{E} \rightsquigarrow \underline{D} = \nabla \varphi$ außerhalb

In der Kugel: $\underline{D} = \epsilon \underline{E} \rightsquigarrow \underline{D} = \epsilon \nabla \varphi$ innerhalb

Wegen $\rho^{\text{ex}} = 0 = \text{div } \underline{D} = 0 \Rightarrow \varphi$ innen und außen harmonisch ($\Delta \varphi = 0$) \rightsquigarrow

Wie bei Metallkugel $\varphi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l}) P_l(\cos \vartheta)$

($P_l(\cos \vartheta)$ = Legendre-Polynom)

Randbedingungen an Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned} E_{\text{tang}} |_{\partial K} & \text{ stetig} \\ D_{\text{normal}} |_{\partial K} & \text{ stetig } (\Phi^{\text{ex}} = 0) \end{aligned}$$

Reicht zur eindeutigen Bestimmung der Lösung. Man findet, daß E_{normal} und E_{tang} springen, d.h. \underline{E} hat wie erwartet Quellen an der Oberfläche und \underline{D} hat dort Wirbel.

Es zeigt sich eindrucksvoll, wenn man die Feldlinien der Zusatzfelder $\underline{E} - \underline{E}_0$ und $\underline{D} - \underline{E}_0$ zeichnet.

In der Kugel hat $\underline{E} - \underline{E}_0$ die zu \underline{E}_0 entgegengesetzte Richtung (entelektrisierendes Feld), $\underline{D} - \underline{E}_0$ die gleiche Richtung.

Behandlung der magnetischen Kugel analog.

4.1.3 Elektromagnetische Wellen

Betrachten nun Propagation elektro-dynamischer Wellen im (homogenen) isotropen und nichtdispersiven Medium:

$$\text{isotropen : } \begin{cases} \underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{\mu}} = \mu \underline{\underline{1}} \end{cases} \quad \text{nichtdispersiven : } \begin{cases} \epsilon(\omega) = \epsilon \\ \mu(\omega) = \mu \end{cases}$$

Vakuum, Flüssigkeiten, kubische Kristalle, polykristalline Medien: isotrop, aber nichtdispersiv nur in begrenzten Frequenzbereichen fern von Absorptionsfrequenzen. $\rightsquigarrow \epsilon$ reell.

Freie Wellen genügen dann den 4 homogenen Wellengleichungen: $\mu = 1$, da gesamter dynamischer Response in \underline{P} (d.h. $\underline{B} = \underline{H}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{D} = \varepsilon \operatorname{div} \underline{E} = 0 & \quad \operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = \underline{0} \\ \operatorname{div} \underline{B} = 0 & \quad \operatorname{rot} \underline{B} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} = \underline{0} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Mit $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{E} - \Delta \underline{E}$ und $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{B} = -\Delta \underline{B}$ folgt, daß alle Kartes. Komp. von \underline{E} und \underline{B} einer Wellengleichung genügen:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0 \quad (4.37)$$

mit der Geschwindigkeit

$$v = c/n \quad , \quad n = \sqrt{\varepsilon} \quad (4.38)$$

Spezielle Lösungen sind ebene Wellen

$$u(\underline{r}, t) = e^{i\mathbf{k} \cdot \underline{r} - \omega t} \quad (4.39)$$

wobei der Wellenvektor \underline{k} und die Frequenz ω gegeben sind durch

$$\omega = vk = ck/n = ck/\sqrt{\varepsilon} \quad (4.40)$$

Welle propagiert in Richtung \underline{k} mit der Geschwindigkeit v , Wellenlänge ist $\lambda = 2\pi/k$.

Theorie der Fourier-Transformation \rightsquigarrow alle Lösungen von (4.37) lassen sich als Überlagerung um ebene Wellen darstellen.

⇒ Für eindimensionale Wellen (d.h. alle \underline{k} parallel): allgemeinste 1-dim. ebene Welle gegeben durch (s.Übg.)

$$u_{\underline{n}}(\underline{r}, t) = f(\underline{n} \cdot \underline{r} - vt) + g(\underline{n} \cdot \underline{r} + vt) \quad (4.41)$$

($\underline{k} = k \cdot \underline{n}$), f und g beliebig.

Beide Wellenzüge f und g propagieren unverformt, da Wellengl.

- a) linear
- b) dispersionslos

Bei nichtlinearen und bei dispersiven Medien verformen sich i.a. die Wellenzüge. Dispersion und Nichtlinearität ⇒ solitäre Wellen oder Solitonen.

Wir suchen nun Lösungen von (4.37) der Form

$$\boxed{E(\underline{r}, t) = \underline{E} e^{ik(\underline{n} \cdot \underline{r} - vt)} \quad , \quad \underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B} e^{ik(\underline{n} \cdot \underline{r} - vt)} \quad (4.42)}$$

\underline{E} und \underline{B} beliebige komplexe Vektoren, physikalische Lösung besteht aus dem Realteil (oder Imaginärteil) von (4.42).

Wegen $\text{div } \underline{E} = 0$ und $\text{div } \underline{B} = 0$ folgt

$$\boxed{\underline{n} \cdot \underline{E} = 0 \quad , \quad \underline{n} \cdot \underline{B} = 0 \quad (4.43)}$$

d.h. die Wellen sind stets transversal. Wegen

$$\text{rot } \underline{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0 \quad \text{folgt} \quad \underline{k} \times \underline{E} = \frac{\omega}{c} \underline{B} \quad (4.44)$$

also

$$\boxed{\underline{B} = \sqrt{\varepsilon} \underline{n} \times \underline{E} \quad (4.45)}$$

d.h. \underline{E} und \underline{B} stehen überall senkrecht aufeinander.

Beachte $\underline{E}, \underline{B}$ sind komplex.

Führe reelles rechtsorientiertes Dreibein (ONS) $\underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2, \underline{\varepsilon}_3, \underline{n}$ ein:

$$\begin{aligned}\underline{E} &= E_1 \underline{\varepsilon}_1 + E_2 \underline{\varepsilon}_2 \\ \underline{B} &= B_1 \underline{\varepsilon}_1 + B_2 \underline{\varepsilon}_2\end{aligned}\quad (4.46)$$

mit $B_1 = -\sqrt{\varepsilon} E_2, B_2 = -\sqrt{\varepsilon} E_1$ wg.(4.45)

E_1, E_2 sind komplexe Zahlen.

Wir diskutieren nur \underline{E} weiter. Wir zeigen nun, daß el. Feldvektor \underline{E} Ellipse beschreibt, wenn \underline{r} oder t variiert wird.

Zerlegen E_j in Betrag und Phase: $E_j = e_j e^{i\delta_j}$

Betrachten reelle physikalische Feldkomp.

$$E_j(\tau) = \text{Re} \left(\underline{E} e^{i\tau} \cdot \underline{e}_j = e_j \cos(\tau + \delta_j) \right) \quad \text{mit} \quad \tau = k(\underline{n} \cdot \underline{r} - vt) \quad (4.47)$$

Dies ist Parameterdarstellung einer Ellipse

$$\frac{E_1^2(\tau)}{e_1^2} + \frac{E_2^2(\tau)}{e_2^2} = 1 \quad (4.48)$$

Man kann $\underline{\varepsilon}_1$ und $\underline{\varepsilon}_2$ immer so wählen, daß sie in Richtung der Hauptachsen der Ellipse zeigen. Für komplexe E_j bedeutet dies, daß sie orthogonal sind:

$$E_1 = e_1 e^{i\delta}, E_2 = \pm e_2 e^{i\delta} \quad (4.49)$$

Damit folgt für die physikalischen Ausdrücke

$$E_1(\tau) = e_1 \cos(\tau + \delta) \quad , \quad E_2(\tau) = \mp e_2 \sin(\tau + \delta) \quad (4.50)$$

Parameterdarstellung einer Ellipse in Hauptachsenko.

Die Welle heißt demnach elliptisch polarisiert.

Spezialfälle: (1) $e_1 = 0$ oder $e_2 = 0$: linear polarisiert

(2) $e_1 = e_2$: zirkular polarisiert

In komplexer Formulierung bedeutet lineare Polarisierung E_1/E_2 reell (E_1 von E_2 gleiche Phase), zirkulare Polarisierung $E_1/E_2 = \pm i$ gleicher Betrag (90° Phasenversch.)

Durch Überlagerung von zwei linear unabhängigen Wellen ist jede Polarisation erreichbar.

Zwei linear, orthogonal polarisierte Wellen \Rightarrow

(1) phasengleiche Überlagerung \rightarrow wieder lineare Polarisation

(2) gleiche Amplitude 90° Phasenverschiebung \rightarrow zirkulare Polarisation

Umgekehrt: Durch zwei zirkular polarisierte Wellen sind alle Pol. durch Überlagerung erzeugbar. Wellen mit Umlaufsinn gemäß Rechtehandregel (bzgl. Ausrichtung) heißen linkspolarisiert oder von positiver Helizität.

Obige elektro-magnetische Wellen sind weitgehend realisierbar mit

(a) Radiowellensendern

(b) Lasern

Andere Quellen: Überlagerung vieler verschiedener ebener Wellen. Notwendig für die Realisierung ebener Wellen:

1. Unendliche Ausdehnung und perfekte Ebenheit: auf natürliche Weise eingeschränkt. Makroskopische Dimensionen ($\gg \lambda$) zufriedenstellend.
2. Monochromasie: in vielen Fällen erreichbar.
3. Eindeutige Polarisierung: leicht erreichbar.
4. Kohärenz: Natürliches, sehr gut monochromatisches und eindeutig polarisiertes Licht besteht aus Überlagerung relativ kurzer Wellenzüge. \rightarrow nur für kurze Zeit phasenkohärent. Laser- und Radiowellen um viele Größenordnungen größere Kohärenz. Unterschiede in der Kohärenz zwischen monochromat. natürlichem Licht und Laserlicht nicht im Fourier-spektrum auszumachen. \leadsto statistische Beschreibung, Aussagen über Amplituden- und Phasenfluktuationen.

Brechungen und Reflexionsgesetze

Wir diskutieren nun das Verhalten einer ebenen Welle beim Übergang von einem in ein anderes Medium.

Ebene Welle mit Wellenvektor \underline{k} propagiere in einem Medium mit Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ , d.h. Brechungsindex n , und treffe auf Grenzfläche zum Medium mit Dielektrizitätskonstante ε' , Permeabilität μ' , d.h. Brechungsindex $n' = \sqrt{\varepsilon'\mu'}$. Bekanntlich entstehen i.a. eine gebrochene Welle im gestrichenen Medium und eine reflektierte Welle. Notation \rightarrow Zeichnung

$$(a) \text{ einf. : } \underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \quad , \quad \underline{B} = \frac{n}{k} \underline{k} \times \underline{E} \quad (4.51)$$

$$(b) \text{ gebr. : } \underline{E}' = \underline{E}'_0 e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t)} \quad , \quad \underline{B}' = \frac{n}{k'} \underline{k}' \times \underline{E}' \quad (4.52)$$

$$(c) \text{ refl. : } \underline{E}'' = \underline{E}''_0 e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t)} \quad , \quad \underline{B}'' = \frac{n}{k''} \underline{k}'' \times \underline{E}'' \quad (4.53)$$

Da damit die Maxwell-Gleichungen erfüllt sind, müssen diese Wellen zu allen Zeiten t und überall auf der Grenzfläche gewisse Randbedingungen erfüllen.

$$\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t = \underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t + m_1 2\pi = \underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t + m_2 2\pi \quad \forall t, \forall \underline{r}$$

mit $\underline{r} \cdot \underline{e}_n = 0$

$$\Rightarrow \underline{r} = 0 \Rightarrow \omega = \omega' = \omega'' \quad (4.54)$$

$$t = 0 \Rightarrow k = k'' = \frac{\omega}{c} n \quad , \quad k' = \frac{\omega}{c} n' \quad (\text{oder } \frac{n}{k} = \frac{n}{k'} = \frac{n}{k''})$$

$$f \forall r, \underline{r} \cdot \underline{e}_n = 0 \quad : \quad \underline{k} \cdot \underline{r} = \underline{k}' \cdot \underline{r} = \underline{k}'' \cdot \underline{r} \quad (4.55)$$

$$\Rightarrow (\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{r} = (\underline{k} - \underline{k}'') \cdot \underline{r} = 0$$

$$\Rightarrow (\underline{k} - \underline{k}') \parallel \underline{e}_n \quad , \quad (\underline{k} - \underline{k}'') \parallel \underline{e}_n$$

$$\text{außerdem } \underline{k} \times \underline{e}_n = \underline{k}' \times \underline{e}_n = \underline{k}'' \times \underline{e}_n \quad (4.56)$$

(4.55) $\Rightarrow k \sin(\alpha) = k' \sin(\beta) = k'' \sin(\alpha')$ mit (4.54) folgt daraus das

$$\underline{\text{Reflexionsgesetz}} \quad \alpha = \alpha' \quad (4.57)$$

$$\underline{\text{Brechungsgesetz}} \quad \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n'}{n} \quad (\text{Snellius}) \quad (4.58)$$

Sehr allgemein, für Lösungen beliebiger Wellengleichungen gültig. Kinematischer Aspekt. Nun dynamische Eigenschaften, \underline{E}_0 und \underline{B}_0 wichtig.

Stetigkeitsbedingungen

$$D_n \text{ stetig} \Rightarrow [\varepsilon (\underline{E}_0 + \underline{E}''_0) - \varepsilon' \underline{E}'_0] \cdot \underline{e}_n = 0 \quad (4.59)$$

$$B_n \text{ stetig} \Rightarrow [\underline{k} \times \underline{E}_0 + \underline{k}'' \times \underline{E}''_0 - \underline{k}' \times \underline{E}'_0] \cdot \underline{e}_n = 0 \quad (4.60)$$

$$E_t \text{ stetig} \Rightarrow [\underline{E}_0 + \underline{E}''_0 - \underline{E}'_0] \times \underline{e}_n = 0 \quad (4.61)$$

$$H_t \text{ stetig} \Rightarrow \left[\frac{1}{\mu} (\underline{k} \times \underline{E}_0 + \underline{k}'' \times \underline{E}''_0) - \frac{1}{\mu'} \underline{k}' \times \underline{E}'_0 \right] \times \underline{e}_n = 0 \quad (4.62)$$

Betrachte Spezialfälle (allg. Fall geht daraus hervor):

- (1) \underline{E}_0 senkrecht zur Einfallsebene:
 (d.h. senkrechte Papierebene in Skizze)

$$\begin{aligned}\underline{E}_0 &= E_0 \underline{e}_n \times \underline{k} \\ \underline{E}'_0 &= E'_0 \underline{e}_n \times \underline{k} \\ \underline{E}''_0 &= E''_0 \underline{e}_n \times \underline{k}\end{aligned}$$

Dann (4.59) automatisch erfüllt.

$$(4.61) \Rightarrow E_0 + E''_0 - E'_0 = 0$$

also auch (4.60) erfüllt : $\underline{e}_n \times \underline{k}(E_0 + E''_0 - E'_0) = 0$

$$\begin{aligned}(4.62) \Rightarrow & \frac{1}{\mu} [(\underline{k} \cdot \underline{e}_n) \underline{E}_0 + (\underline{k}'' \cdot \underline{e}_n) \underline{E}''_0] - \frac{1}{\mu'} (\underline{k}' \cdot \underline{e}_n) \underline{E}'_0 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\mu} k \cos(\alpha)(E_0 - E''_0) - \frac{1}{\mu'} k' \cos(\beta) E'_0 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{n}{\mu} (E_0 - E''_0) \cos(\alpha) - \frac{n'}{\mu'} E'_0 \cos(\beta) = 0\end{aligned}$$

Auflösen nach E_0 und E'_0 :

$$\begin{aligned} \frac{E'_0}{E_0} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\alpha) + \sqrt{\varepsilon'/\mu'} \cos(\beta)} && \begin{array}{l} \text{mit (4.58)} \\ \xrightarrow{\mu=\mu'} \end{array} && \frac{2 \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \\ \frac{E''_0}{E_0} &= \frac{\sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\alpha) - \sqrt{\varepsilon'/\mu'} \cos(\beta)}{\sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\alpha) + \sqrt{\varepsilon'/\mu'} \cos(\beta)} && \begin{array}{l} \text{mit (4.58)} \\ \xrightarrow{\mu=\mu'} \end{array} && \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Fresnel'sche Formeln

(2) \underline{E}_0 in der Einfallsebene:

(4.60) automatisch erfüllt.

$$(4.61) \Rightarrow (E_0 - E''_0) \cos(\alpha) - E'_0 \cos(\beta) = 0$$

$$(4.62) \Rightarrow (n/\mu)(E_0 + E''_0) - (n'/\mu')E'_0 = 0$$

(4.59) ebenfalls erfüllt.

Auflösen \Rightarrow

$$\begin{aligned} \frac{E'_0}{E_0} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon'/\mu'} \cos(\alpha) + \sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\beta)} \xrightarrow{\mu=\mu'} \frac{2 \sin(\beta) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \\ \frac{E''_0}{E_0} &= \frac{\sqrt{\varepsilon'/\mu'} \cos(\alpha) - \sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\beta)}{\sqrt{\varepsilon'/\mu'} \cos(\alpha) + \sqrt{\varepsilon/\mu} \cos(\beta)} \xrightarrow{\mu=\mu'} \frac{2 \tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Für senkrechten Einfall (1) und (2) identisch.

Dann:

$$\begin{aligned} \frac{E'_0}{E_0} &= \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} + 1} \xrightarrow{\mu=\mu'} \frac{2n}{n+n'} \\ \frac{E''_0}{E_0} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} + 1} \xrightarrow{\mu=\mu'} \frac{n' - n}{n' + n} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Im folgenden sei $\mu' = \mu$.

Für $n' = n$ ist $\alpha = \beta$, also gibt es keine reflektierte Welle, klar.

Brewster-Winkel: einfallende Welle in Einfallsebene polarisiert (d.h. (2)), dann ist $E''_0 = 0$ (d.h. kein reflektierende Anteil), wenn $\tan(\alpha + \beta) = \infty$ d.h. $\alpha + \beta = \pi/2 \Rightarrow \sin(\beta) = \cos(\alpha)$, also für

$$\tan(\alpha_B) = \frac{n'}{n} \quad (4.66)$$

Anwendungen: Polarisations-Filter beim Autof., Fotografieren ins Wasser hinein.

Totalreflexion: Für $n' < n$ wird $\sin(\beta) > 1$ falls $\alpha > \alpha_0$

$$\sin(\alpha_0) = \frac{n}{n'}$$

(4.67)

⇒ inhomogene Welle mit

$$\underline{k}' \cdot \underline{r} = k'(x \sin(\beta) + z \cos(\beta)) = k'x \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_0)} + ik'z \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_0)}\right)^2 - 1} \quad (4.68)$$

$\sin(\beta) > 1 \Rightarrow \cos(\beta) = i\sqrt{\sin^2(\beta) - 1}$ rein imaginär $\Rightarrow |E_0''/E_0| = 1$ in (1) und (2), d.h. Total.

Typische Frequenzabhängigkeit von $\varepsilon(\omega)$:

Für Materie anhand eines ganz simplen Modells. Wir stellen uns die Elektronen in Materie als harmonisch gebundene Teilchen vor, deren Bewegung durch das elektrische Feld \underline{E} angetrieben wird, und durch innere Mechanismen gedämpft ist.

⇒ Newton'sche Bewgl.:

$$m(\ddot{\underline{r}} + \gamma \dot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r}) = e\underline{E}(\underline{r}, t) \quad (4.69)$$

Periodische Antriebskraft $\underline{E} = E_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \underline{r}(t) = \underline{r}_0 e^{-i\omega t}$ asymp.

$$\Rightarrow m(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \underline{r}_0 = e \underline{E}_0 \quad (4.70)$$

Verschiebung \underline{r} der Ladung führt zu Dipolmoment

$$\underline{p} = e \underline{r}_0 = \frac{e^2}{m} \underline{E}_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (4.71)$$

N Moleküle pro Volumeneinheit \Rightarrow Dipoldichte $\underline{p} \Rightarrow$ dielektrische Funktion

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (4.72)$$

f_j "Oszillatorstärke" = Anzahl von Elektronen im Molekül, die mit Frequenz ω_j schwingen und Dämpfungskonstante γ_j haben.

Quantentheorie der Materie führt auf Formeln wie (4.72), f_j müssen ganzzahlig sein und eine wichtige Summenregel (f -Summenregel) erfüllen.

$$\sum_j f_j = Z \quad (4.73)$$

Z = Anzahl der Elektronen im Molekül

In solchen dispersiven (und dissipativen) Medien hat man mit einer komplexen Wellenzahl

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = \frac{\omega}{c} (n + i\chi) \quad (4.74)$$

zu rechnen. Man hat

$$n^2 - \chi^2 = \operatorname{Re} \varepsilon, \quad 2n\chi = \operatorname{Im} \varepsilon \quad (4.75)$$

Eine Welle in Richtung des Einheitsvektors \underline{e}_n (reell) wird bei der Propagation exponentiell gedämpft:

$$e^{ik\underline{e}_n \cdot \underline{r} - i\omega t} = e^{-(\omega/c)\chi\underline{e}_n \cdot \underline{r}} e^{i\omega[(n/c)\underline{e}_n \cdot \underline{r} - t]} \quad (4.76)$$

In Metallen und Plasmen sind einige Elektronen nicht harmonisch gebunden, sondern frei beweglich.

Dies kann in unserer obigen Theorie durch $\omega_0 = 0$ beschrieben werden. Wir betrachten diesen Fall für niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_j$ ($j > 0$). Dann

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i \frac{4\pi \sigma_0}{\omega \left(1 - \frac{i\omega}{\gamma_0}\right)} \quad (4.77)$$

mit

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_{j < 0} \frac{f_j}{\omega_j^2} \quad ; \quad \sigma_0 = \frac{f_0 N e^2}{m \gamma_0} \quad (4.78)$$

Bedeutung von σ_0 als der statischen Leitfähigkeit ist mit (4.25) und (4.28) verknüpft.

Die Drudeformel

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega/\gamma_0} \quad (4.79)$$

für die dynamische Leitfähigkeit stammt aus dem Jahre 1900. Ein "guter Leiter" ist durch die Bedingung $4\pi\sigma/\omega \gg \varepsilon_0$ gekennzeichnet. Für einen solchen ist $\varepsilon(\omega)$ nahezu rein imaginär und für die Wellenzahl (4.74) folgt

$$k = (1 + i)\sqrt{2\pi\omega\sigma}/c \quad (4.80)$$

Eine Welle wird folglich beim Eindringen auf der Eindring- oder Skintiefe

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \quad (4.81)$$

um den Faktor $1/e$ gedämpft.

Bei höheren Frequenzen, $\omega \gg \gamma_0$, wird die Leitfähigkeit σ (4.79) rein imaginär (und unabhängig von γ_0) und wir erhalten

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.82)$$

wobei die Plasmafrequenz ω_p durch

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi f_0 N e^2}{m} \quad (4.83)$$

gegeben ist. Da bei Metallen meist $\omega_p \gg \gamma_0$ und auch bei Plasmen diese Situation auftritt, gibt es einen Frequenzbereich, in dem $\varepsilon < 0$. Man hat dann für alle Einfallswinkel die Situation der Totalreflexion, dies erklärt das Glänzen von Metallen bei optischen Frequenzen.

4.1.4 Energieerhaltung in der Elektro-Dynamik in Materie

Erhaltungsgleichung:

Die mechanische Arbeit ist jetzt sinnvollerweise die der äußeren Ströme im E-Feld. Daher

$$-\underline{J}^{\text{ex}} \cdot \underline{E} = \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{D}} \cdot \underline{E} - \frac{c}{4\pi} \text{rot } \underline{H} \cdot \underline{E} + \frac{1}{4\pi} \left(\dot{\underline{B}} + c \text{rot } \underline{E} \right) \cdot \underline{H}$$

⇒

$$\boxed{-\underline{J}^{\text{ex}} \cdot \underline{E} + \frac{1}{4\pi} \left(\underline{E} \cdot \dot{\underline{D}} + \underline{H} \cdot \dot{\underline{B}} \right) + \frac{c}{4\pi} \text{div} \left(\underline{E} \times \underline{H} \right) = 0} \quad (4.84)$$

Pointingvektor

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{H})$$

Feldenergie: (ganz allgemein)

1) **Elektrische Feldenergie:** $\delta\rho^{\text{ex}} \rightarrow \delta\underline{D}$, wird im vorhandenen Feld \underline{E} aus dem ∞ -en herangebracht. $\underline{E} = -\text{grad}\Phi$ mit $\Phi(\infty) = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta A &= \int d^3r \delta\rho^{\text{ex}}(\underline{r})\varphi(\underline{r}) \quad \text{ist aufzubringen.} \\ \Rightarrow \delta A &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \underline{E}(\underline{r}) \cdot \delta\underline{D}(\underline{r}) \end{aligned}$$

denn $\delta\rho = \nabla \cdot (\delta\underline{D})/4\pi$, + part. Int.

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \int d^3r \frac{1}{4\pi} \underline{E} \cdot \dot{\underline{D}}$$

Eine Feldenergie(dichte) existiert nur dann, wenn δA sich als totale Ableitung schreiben läßt (\longleftrightarrow Hysterese):

$\underline{E} = \underline{E}(\underline{D})$ eindeutig und

$$\frac{\partial E_i}{\partial D_j} = \frac{\partial E_j}{\partial D_i} \Leftrightarrow$$

Es existiert $f(\underline{D})$ mit $E_i = \partial f / \partial D_i$ und $\underline{E} \cdot \delta\underline{D} = \delta f(\underline{D})$

$$\text{Dann} \quad u_{\text{el}}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} f(\underline{D}(\underline{r}))$$

Beispiel: $\underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{E}$ und $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ($\det \underline{\underline{\varepsilon}} \neq 0$)

$$\leadsto \underline{E} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1} \underline{D} \quad E_i = \sum_j (\varepsilon^{-1})_{ij} D_j = \frac{\partial}{\partial D_i} \frac{1}{2} \sum_{kl} D_k (\varepsilon^{-1})_{kl} D_l$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{\text{el}}(\underline{r}) &= \frac{1}{8\pi} \underline{E} \cdot \underline{D} &= \frac{1}{8\pi} \underline{E} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E} \\ & &= \frac{1}{8\pi} \underline{D} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1} \cdot \underline{D} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{u}_{\text{el}}(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} \left(\dot{\underline{E}} \cdot \underline{D} + \underline{E} \cdot \dot{\underline{D}} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(\underline{E} \cdot \dot{\underline{D}} \right)$$

2) **Magnetische Feldenergie:** Wir ändern \underline{J}^{ex} und $\delta \underline{J}^{ex}$. In dem dabei induzierten Feld $\delta \underline{E}(t)$ haben die Ströme die Arbeit

$$\delta A = - \int dt \int d^3r \delta \underline{E} \cdot \underline{J}^{ex}$$

zu leisten.

Analog zu (3.51) und (3.54)

$$\begin{aligned} \delta A &= - \int dt \int d^3r \delta \underline{E} \cdot \frac{c}{4\pi} (\text{rot} \underline{H}) \\ &= - \int dt \int d^3r \frac{c}{4\pi} (\text{rot} \delta \underline{E}) \cdot \underline{H} \quad (H = O\left(\frac{1}{r^3}\right)) \\ &= \int dt \int d^3r \frac{1}{4\pi} \delta \dot{\underline{B}} \cdot \underline{H} = \int d^3r \frac{1}{4\pi} \delta \underline{B} \cdot \underline{H} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta A = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \underline{H}(\underline{r}) \cdot \delta \underline{B}(\underline{r})$$

(4.85)

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \int d^3r \underline{H} \cdot \dot{\underline{B}}$$

Falls $\delta H = \underline{H}(\underline{B})$ eindeutig und

$$\frac{\partial H_i}{\partial B_j} = \frac{\partial H_j}{\partial B_i} \Leftrightarrow$$

Es existiert $g(\underline{B})$ mit $H_i = \partial g / \partial B_i$

Dann

$$u_{\text{mag}}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} g(\underline{B}(\underline{r}))$$

Beispiel: $\underline{B} = \underline{\mu} \cdot \underline{H}$ und $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ ($\det \underline{\mu} \neq 0$)

$$\Rightarrow \quad u_{\text{mag}} = \frac{1}{8\pi} \underline{H} \cdot \underline{B},$$

$$u_{\text{mag}} = \frac{1}{4\pi} \underline{H} \cdot \underline{\dot{B}}$$

Lorentz-Invarianz der Elektro-Dynamik

Erinnerung an die Vorlesung Theoretische Physik I, relativistische Mechanik: Betrachte physikalische Systeme in einem Inertialsystem I und in einem dazu relativ mit Geschwindigkeit \underline{v}_0 bewegten Inertialsystem I' .

Die Natur zeichnet kein Inertialsystem aus (Relativitätsprinzip) \rightsquigarrow welcher Art sind die Transformations-Gleichungen?

Galileitransformation:

$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}_0 t, \quad t' = t$$

$$\Rightarrow \text{aus} \quad \underline{F} = q \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \quad \text{folgt (3.50)} \quad (4.86)$$

$$\underline{E}' = \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v}_0 \times \underline{B}, \quad \underline{B}' = \underline{B} \quad (4.87)$$

wegen $\nabla' = \nabla$ und $\left. \frac{\partial}{\partial t'} \right|_{\underline{r}'=\text{konst.}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\underline{r}'=\text{konst.}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\underline{r}=\text{konst.}} + (\underline{v}_0 \cdot \nabla)_{t=\text{konst.}}$

$$\begin{aligned}
 \text{folgt } \nabla' \cdot \underline{E}' &= \nabla \cdot \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v}_0 \times \underline{B} \right) \\
 &= \nabla \cdot \underline{E} - \frac{1}{c} \underbrace{\underline{v}_0 \cdot (\nabla \times \underline{B})}_{\text{verändert Maxwell-Gl. } \nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho}
 \end{aligned}$$

⇒ Es gibt kein Transformationsverhalten für die Felder, das zusammen mit der Galileitransformation (4.87) die Maxwell-Gleichungen erhält.

Anstelle von (4.87) ist die Lorentz-Transformation zu nehmen! Dies folgt insbesondere unmittelbar aus den Wellenausbreitungserscheinungen! (Geschwindigkeit c ist unabhängig vom Inertialsystem).

Lorentz-Transformation:

Grundeigenschaften:

Zusammenfassung von Raum-Zeit-Komponenten eines Ereignisses durch

$$\boxed{x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \underline{r})} \quad (4.88)$$

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit verlangt, daß "Abstand" s

$$\boxed{s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} \quad (4.89)$$

unabhängig vom Ko-system ist.

Mit dem metrischen Tensor

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{d.h. } g_{\alpha\beta} &= 0 \text{ für } \alpha \neq \beta, \quad g_{00} = 1, \\ g_{11} &= g_{22} = g_{33} = -1 \end{aligned}} \quad (4.90)$$

$$\text{ist } s^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

(Einstein Summenkonv.)

(4.91)

Es stellt sich die Frage: Welche linearen Ko-Transformationen

$$x'^\alpha = L^\alpha_\beta x^\beta, \quad \text{d.h. } \boxed{x' = Lx}$$
(4.92)

lassen s^2 invariant? \leadsto Lorentz-Transformationen.

$$s'^2 = g_{\gamma\delta} L^\gamma_\alpha L^\delta_\beta x^\alpha x^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

$$\Rightarrow L^\gamma_\alpha g_{\gamma\delta} L^\delta_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad \text{d.h. } \boxed{L^t g L = g}$$
(4.93)

wäre $g = 1$, so wäre L 4-dim orthogonale Transformationen.
Aber $g \neq 1 \leadsto$ andere Gruppe!

Enthaltene Fälle:

$$3 - \text{dim Drehungen}(\underline{D}) : L = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \underline{D} \end{array} \right)$$

$$\text{Raumspiegelung (Inversion)} : L = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -\underline{1} \end{array} \right) =: P$$

$$\text{Zeitumkehr} : L = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \underline{1} \end{array} \right) =: T$$

Spezielle Lorentz-Transformation:

$$L = \left(\begin{array}{cc|cc} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4.94)$$

Def. $v/c = \tanh \zeta$, dann

$$\cosh \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4.95)$$

$$\sinh \zeta = \tanh \zeta \cosh \zeta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x'^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right), \\ x'^1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right), \\ x'^2 &= x^2, \quad x'^3 = x^3 \end{aligned} \quad (4.97)$$

(4.97) beschreibt den Übergang zu einem mit der Geschwindigkeit v in x^1 -Richtung bewegten Bezugssystem (\rightarrow TP I, relativ. Mechanik).

Verallgemeinerung auf Geschwindigkeit \underline{v} in beliebiger Richtung (durch Beachtung der Drehinv.):

$$\begin{aligned}
 x'^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(x^0 - \frac{1}{c} \underline{v} \cdot \underline{x} \right) \\
 \underline{x}' &= \underline{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) \frac{(\underline{v} \cdot \underline{x}) \underline{v}}{v^2} - \frac{x^0/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \underline{v} \\
 &= \gamma \underline{x}_{\parallel} + \underline{x}_{\perp} - \gamma t \frac{\underline{v}}{c}
 \end{aligned}
 \tag{4.98}$$

\leadsto 3-param. Schar von Lorentz-Transformationen. Noch keine Gruppe! Man muß Drehungen hinzunehmen um Lorentz-Gruppe zu erhalten $\leadsto G$ Parameter

Eigentliche Lorentzgruppe: eigentliche Drehungen (4.88) und (4.98) \rightarrow Kontinuierliche Gruppe, definiert durch

$$L^t g L = g, \quad \det L = +1, \quad L^0_0 > 0 \tag{4.99}$$

Hinzufügen der diskreten Trafos $P, T, P \cdot T$ führt zur (vollen) Lorentzgruppe, die daher aus 4 unzusammenhängenden Teilen besteht.

Um Skalarprodukt wie in (4.91) übersichtlicher zu machen, definiert man neben

$$\begin{aligned}
 \text{kontravarianten Vierervektor} & \quad x^\alpha = (ct, \underline{x}) \text{ siehe (4.88)} \\
 \text{kovarianten Vierervektor} & \quad x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta = (ct, -\underline{x}) \tag{4.100}
 \end{aligned}$$

Wegen (4.92) und (4.93) transformiert sich ein kovarianter Vierervektor wie

$$x'_\alpha = (L^{-1})^\beta_\alpha x_\beta, \quad x' = (L^{-1})^t x \tag{4.101}$$

Bew. in Matrixschreibweise (x kontravariant, y kovariant)

$$y' = g x' = g L x = g L g^{-1} = (L^t)^{-1} y$$

Def.: Skalarprodukt aus kontravariantem und kovariantem Vektor

$$s^2 = x_\alpha x^\alpha \quad (4.102)$$

Solche Skalarprodukte sind Lorentzinvariant: (y kovariant, x kontravariant)

$$y'^t x' = \left[(L^{-1})^t y \right]^t L x = y^t L^{-1} L x = y^t x$$

Def.: kontravariante Tensoren 2. Stufe, $f^{\alpha\beta}$, Trafo-Verhalten

$$F'^{\alpha\beta} = L^\alpha_\gamma L^\beta_\delta F^{\gamma\delta}, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{F' = LFL^t} \quad (4.103)$$

Analog zu (4.100):

“Herunterziehen” von Indizes \rightsquigarrow kovarianter Tensor

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} F^{\gamma\delta} \quad (4.104)$$

oder gemischter Tensor

$$F_\alpha^\beta = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\beta} \quad (4.105)$$

Verallgemeinerung des Begriffs des inneren Produktes: Summation über ein Indexpaar aus einem oberen und einem unteren Index.

(auch Kontraktion, Verjüngung).

$f_{\dots\alpha\dots} \cdot G^{\dots\alpha\dots}$ ist Tensor (da alle nicht-kontrahierten Indizes nicht berührt werden) mit F und G .

Beispiel:

F_α^α ist Skalar

$F_\alpha^\beta x_\beta$ ist kovarianter Vektor

Die definierte Gleichung (4.93) für Lorentz-Transformationen heißt: Der metrische Tensor $g_{\alpha\beta}$ ist ein kovarianter Tensor, der unter allen L invariant

bleibt. Das entspricht der Rolle, die bei Drehgruppe die Einheitsmatrix spielt. Die Umkehrung von (4.100) führt zu:

$$x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta \quad (4.106)$$

Man definiert kontravarianten metrischen Tensor $g^{\alpha\beta}$. Offenbar ist $g^{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^{-1}$, stimmt wegen (4.90) mit $g_{\alpha\beta}$ überein. $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

Man kann zeigen:

$$\forall L \text{ Lorentz - Trafo. } g^{\alpha\beta} = L^\alpha_\gamma L^\beta_\delta g^{\gamma\delta} \quad (4.107)$$

d.h. $g^{\alpha\beta}$ ist kontravarianter Tensor im Sinne von (4.103): Gemischte Tensoren g^α_β und g^β_α . Wegen $g^{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^{-1}$ gilt:

$$g^\alpha_\beta = g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (4.108)$$

wobei δ_α^β als Kronecker-Delta bezeichnet wird.

Transformationsverhalten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$:

Aus der Kettenregel und (4.92) ($x'^\alpha = L^\alpha_\beta x^\beta$) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} = L^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = (L^{-1})^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

$\Rightarrow \partial/\partial x^\alpha$ kovarianter Vierervektor, analog $\partial/\partial x_\alpha$ kontravarianter Vierervektor.

Bezeichnung:

$$\partial^\alpha := \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{c \partial t}, -\nabla \right), \quad \partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{c \partial t}, \nabla \right) \quad (4.109)$$

Bei der Untersuchung der Lorentzinvarianz der Elektro-Dynamik kann man von der Mechanik ausgehen und das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Größen aus der Kraftgleichung

$$\frac{dp}{dt} = q \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right)$$

erschließen.

Man weiß, daß \underline{p} die räumlichen Komponenten des Viererimpulses sind:

$$p^\alpha = (p^0, \underline{p}), \quad p^0 = E/c, \quad E = \sqrt{(mc)^2 + (cp)^2} \quad (4.110)$$

Die Geschwindigkeit \underline{v} selbst ist kein Teil eines Vierervektors, sondern geht wie folgt in die Vierergeschwindigkeit $U^\alpha = p^\alpha/m$ ($m =$ Masse, d.h. Ruhemasse des Teilchens) ein:

$$U^\alpha = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = (U^0, \underline{U}) \quad (4.111)$$

Die Kraftgleichung erhält eine lorentz-kovariante linke Seite, wenn man (1) sie um die Nullkomponente ergänzt:

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{q}{c} \underline{v} \cdot \underline{E}$$

(2) von der t -Ableitung zur Ableitung nach der Eigenzeit τ des Teilchen übergeht:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \sqrt{1 - (v/c)^2} \frac{d}{d\tau} \text{ wg. } d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{dx_\alpha dx^\alpha} \\ &= \sqrt{dt^2 - dr^2/c^2} = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt \end{aligned}$$

Dann lautet die Kraftgleichung:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} (\underline{U} \cdot \underline{E}, U^0 \underline{E} + \underline{U} \times \underline{B}) \quad (4.112)$$

Rechte Seite: Ladung q ist Lorentz-Skalar!

Wir konstruieren nun aus Vektor U^α und den Feldern \underline{E} und \underline{B} einen Vektor, $\frac{dp^\alpha}{d\tau}$.

Tensoralgebra: Wenn elektro-magnetisches Feld durch Tensor F^α_β beschrieben wird, dann könnte (4.112) die manifest kovariante Form

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^\alpha_\beta U^\beta = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta} \quad (4.113)$$

haben.

Durch Vergleich von (4.112) und (4.113) identifizieren wir den Feldstärketensor:

$$F^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

Antisymmetrisch:

$$\boxed{F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}} \quad (4.115)$$

Wir haben 6 unabhängige Komponenten, die durch die Dreiervektoren \underline{E} und \underline{B} gegeben sind. Wir prüfen nun, ob die Maxwell-Gleichungen damit verträglich sind. Wir beginnen mit den Inhomogenitäten der Maxwell-Gleichungen. Wir erfüllen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{J} = 0$$

Diese ist wegen (4.109) in allen Inertialsystemen gültig, wenn ρ und \underline{J} eine Viererstromdichte

$$J^\alpha = (c\rho, \underline{J}) \quad (4.116)$$

bilden. \Rightarrow Kont.-Gleichung

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (4.117)$$

Dieselbe Struktur hat die Lorentz-Konvention

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{A} = 0$$

die in allen Inertialsystemen gültig ist, wenn die Potentiale Φ und \underline{A} einen Vierervektor

$$A^\alpha = (\varphi, \underline{A}) \quad (4.118)$$

bilden. \Rightarrow Lorentzkonvention

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (4.119)$$

Tatsächlich sind die Wellengleichungen (3.73) dann kovariant.

Der d'Alembert-Operator

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{c \partial t} \right)^2 - \Delta \quad (4.120)$$

ist nämlich Lorentz-Skalar, und die Gleichung (3.73) lautet daher

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha \quad (4.121)$$

Die Felder ergeben sich aus Potentialen nach

$$\underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{c \partial t} - \nabla \varphi, \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

d.h. $E_x = -\partial^0 A^1 + \partial^1 A^0$ usw., $B_x = -\partial^2 A^3 + \partial^1 A^0$

Mit Feldstärketensor (4.114) erhalten wir so tatsächlich

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (4.122)$$

Die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten nun:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \quad (4.123)$$

Wegen $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \square A^\beta - \partial^\beta \underbrace{(\partial_\alpha A^\alpha)}_{=0 \text{ (4.119)}}$ äquivalent zu (4.121).

Für die homogenen Maxwell-Gleichungen erinnern wir uns an die Dualitätstransformation (3.67).

Tensorielle Formulierung: Benutze total antisymm. Tensor 4. Stufe:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{f. alle geraden Perm. von } (\alpha\beta\gamma\delta) = (0123) \\ -1 & \text{f. alle ungeraden Perm. von } (\alpha\beta\gamma\delta) = (0123) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.124)$$

Dieser ist ein invarianter Tensor, denn $\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = L^\alpha_{\alpha'} L^\beta_{\beta'} L^\gamma_{\gamma'} L^\delta_{\delta'} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ total antisymmetrisch und $\epsilon'^{0123} = \det L$.

$$\Rightarrow L^\alpha_{\alpha'} L^\beta_{\beta'} L^\gamma_{\gamma'} L^\delta_{\delta'} \epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \det L \quad (4.125)$$

d.h. ϵ ist invarianter Pseudotensor.

Transformation (3.67):

$$\tilde{F}^{\alpha\beta}(\xi) = F^{\alpha\beta} \cos \xi + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \sin \xi \quad (4.126)$$

Speziell für $\xi = \pi/2$ erhalten wir den dualen Feldstärkentensor

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \tilde{F}^{\alpha\beta}(\pi/2) = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ \hline B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{array} \right) \quad (4.127)$$

Übergang von $F^{\alpha\beta}$ nach $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ bedeutet einfach \underline{E} durch \underline{B} und \underline{B} durch $-\underline{E}$ ersetzen.

Daher ist unmittelbar klar, daß die homogenen Maxwell-Gleichungen durch

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad (= 0^\beta) \quad (4.128)$$

gegeben sind.

Wichtigste Folgerung aus obigem: Wir wissen nun, wie sich die Größen der Elektro-Dynamik bei Lorentz-Transformationen verhalten.

Zunächst Verhalten des Vierervektors $J^\alpha = (c\rho, \underline{J})$. Aus (4.98) lesen wir ab

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(\rho - \frac{1}{c^2} \underline{v} \cdot \underline{J} \right) \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} \underline{J}' &= \underline{J} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) \frac{(\underline{v} \cdot \underline{J}) \underline{J}}{v^2} - \frac{\rho \underline{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \gamma \underline{J}_\parallel + \underline{J}_\perp - \gamma \rho \underline{v} \end{aligned} \quad (4.130)$$

n.b.: Effekt der Lorentz-Kontraktion mittels $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

Das Verhalten von \underline{E} und \underline{B} folgt aus dem von $F^{\alpha\beta}$. Man schreibt zunächst das Transformations-Verhalten bei speziellen L.-Transformationen (4.94) nieder, verallgemeinert dann mit Hilfe räumlicher Drehung auf L.-Transformation (4.98).

Man erhält

$$\begin{aligned} \underline{E}' &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \underbrace{\frac{(\underline{v} \cdot \underline{E})\underline{v}}{v^2}}_{\underline{E}_{\parallel}} \\ \underline{B}' &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left(\underline{B} - \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{E} \right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \underbrace{\frac{(\underline{v} \cdot \underline{B})\underline{v}}{v^2}}_{\underline{B}_{\parallel}} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Vgl. (3.50) ← nur modifiziert durch Erhöhung der zu \underline{v} transversalen Felder um Faktor $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

Zum Abschluß halten wir noch fest, daß wir aus den Feldstärketensoren zwei skalare Felder bilden können.

$$1) \quad \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = B^2 - E^2 \quad (\text{Skalar}) \quad (4.132)$$

$$2) \quad -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \underline{B} \cdot \underline{E} \quad (\text{Pseudoskalar}) \quad (4.133)$$

n.b.: Invarianz dieser beiden Ausdrücke.

Lagrangesche Elektro-Dynamik

Wir untersuchen zunächst die Lagrangefunktion für das freie Teilchen:
Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

Hamilton'sches Prinzip: $S[q_i(t)]$ mit $q_i(t_\nu) = q_{i\nu}$ ($\nu = 1, 2$) stationär ($\delta S = 0$) für wahre Bewegung.

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Freies relativistisches Teilchen: $\partial L_0 / \partial \underline{r} = 0$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \gamma L \Rightarrow \gamma L \text{ Lorentz Skalar} \\ \Rightarrow L_0 &\sim \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad \dim L = \text{Energie} \Rightarrow L_0 \sim \frac{mc^2}{\gamma} \\ L_0 &= -mc^2 \sqrt{1 - v^2(t)/c^2} = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + O(v^4) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial L_0}{\partial \underline{v}} \right)}_{= \underline{p}} &= \frac{d}{dt} (m\gamma \underline{v}) = 0 \end{aligned}$$

Teilchen im elektro-magnetischen Feld: Nichtrelativistisch $L_{\text{int}} = -q\varphi + \gamma L_{\text{int}}$

Skalar $\Rightarrow \gamma L_{\text{int}} \sim A_\alpha U^\alpha$ mit $A_\alpha = (\varphi, -\underline{A})$ und $U^\alpha = (\gamma c, \gamma \underline{v})$ $L = L_0 + L_{\text{int}}$

$$L_{\text{int}} = -\frac{q}{c\gamma} A_\alpha U^\alpha = -q\varphi + \frac{q}{c} \underline{A} \cdot \underline{v} \quad (4.134)$$

Kanonischer Impuls: $\underline{P} = \partial L / \partial \underline{v} = m\gamma \underline{v} + q\underline{A}/c$ wobei $\gamma \underline{v} =$ kinetischer Impuls \underline{p} .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{P} &= \dot{\underline{p}} + \frac{q}{c} \left[\dot{\underline{A}} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{A} \right], & \frac{\partial L}{\partial \underline{r}} &= -q \text{grad } \varphi + \frac{q}{c} [(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{A} + \underline{v} \times \text{rot} \underline{A}] \\ \Rightarrow \quad \dot{\underline{p}} &= q \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} \right) \end{aligned}$$

Lagrangefunktion für Felder:

Punktmechanik	\longrightarrow	Kontinuumsmechanik
Index i	\longrightarrow	\underline{x}, k (Ort, Feldindex bei mehreren Feldern)
dyn. Variable q_i	\longrightarrow	$\varphi_k(\underline{x})$ (Feld)
Geschwindigkeit \dot{q}_i	\longrightarrow	$\nabla \varphi_k(\underline{x}), \dot{\varphi}_k$
$L = \sum_i L_i(q_i, \dot{q}_i)$	\longrightarrow	$\int d^3r \mathcal{L}(\varphi_k, \partial \varphi_k), \mathcal{L}$ Lagrangedichte
$S = \int dt L$	\longrightarrow	$\int d^3r dt \mathcal{L}$

Relativistische Feldtheorie: \mathcal{L} Lorentzskalar, weil $d^3x dt$ invariant. (Zeitdilatation und Lorentzkonstruktion kompensieren sich).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_k, \partial^\alpha \varphi_k)$$

Man variiert die Felder $\varphi_k(x^\alpha)$, $\delta S = 0$ ($\delta \varphi_k(\infty, t) = 0$, $\delta \varphi_k(\underline{r}, t_\nu) = 0$)

\Rightarrow Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\partial^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha \varphi_k)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} = 0 \quad (4.135)$$

Elektro-Dynamik: Als Felder das Viererpotential A^α , $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{em}} &= -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha \\ &= -\frac{1}{16\pi} g_{\mu\chi} g_{\nu\lambda} (\partial^\chi A^\lambda - \partial^\lambda A^\chi)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha\end{aligned}\quad (4.136)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial(\partial^\alpha A^\beta)} &= -\frac{1}{16\pi} g_{\mu\chi} g_{\nu\lambda} [\delta_{\alpha\chi} \delta_{\beta\lambda} F^{\mu\nu} - \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\chi} F^{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} F^{\chi\lambda} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} F^{\chi\lambda}] \\ &= -\frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial A^\alpha} &= -\frac{1}{c} J_\alpha\end{aligned}$$

mit

$$\partial^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial(\partial^\alpha A^\beta)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial A^\beta} = 0$$

\Rightarrow

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J_\beta \quad (4.137)$$

d.h. \mathcal{L}_{em} führt über Euler-Lagrange-Gleichungen auf Maxwell-Gleichungen.

Punktteilchen:

$$\begin{aligned}J^\alpha(\underline{r}', t') &= (c\rho, \underline{J}) \\ &= (\underline{c}, \underline{v}) q \delta(\underline{r}' - \underline{r}(t')) \\ &= \frac{q}{\gamma} U^\alpha \delta(\underline{r}' - \underline{r}(t'))\end{aligned}$$

$$\int d^3 r' \left(-\frac{1}{c} A_\alpha(\underline{r}') J^\alpha(\underline{r}') \right) = -\frac{q}{c\gamma} A_\alpha(\underline{r}) U^\alpha = L_{\text{int}}$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}L &= -\frac{mc^2}{\gamma} - \frac{q}{c\gamma} A_\alpha U^\alpha - \int d^3 r \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= L_{\text{Teilchen}} + L_{\text{int}} + L_{\text{Feld}}\end{aligned}\quad (4.138)$$

Lagrangefunktion für Teilchen im elektro-magnetischen Feld