

(1)

Wdh. Sei C def. durch $C: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (Weg)
 $t \mapsto \underline{c}(t)$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine (skalare) Fkt
 $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld

Def. Linien- od. Wegintegrale:

$$\int_C \varphi d\underline{s} = \int_{t_1}^{t_2} dt \varphi(\underline{c}(t)) \cdot \dot{\underline{c}}(t) \quad (\text{z.B. Vektorkette Abstand } \varphi \equiv 1)$$

$$\text{od } \int_C \varphi d\underline{s} = \int_{t_1}^{t_2} dt \varphi(\underline{c}(t)) \|\dot{\underline{c}}(t)\| \quad (\text{z.B. L\u00e4nge von } C: \varphi \equiv 1)$$

$$\int_C \underline{V} \cdot d\underline{s} = \int_{t_1}^{t_2} dt \underline{V}(\underline{c}(t)) \cdot \dot{\underline{c}}(t) \quad (\text{z.B. Arbeit im Kraftfeld})$$

$$= \langle \underline{V}(\underline{c}(t)), \dot{\underline{c}}(t) \rangle$$

$$\int_C \underline{V} \times d\underline{s} = \int_{t_1}^{t_2} dt \underline{V}(\underline{c}(t)) \times \dot{\underline{c}}(t) \quad (\text{z.B. Biot-Savart Gesetz, ED})$$

Bem. Diese Integrale sind unabh. von der Parametrisierung des Weges C :

$$\text{Sei } f: [t'_1, t'_2] \rightarrow [t_1, t_2]$$

$$t' \mapsto f(t')$$

eine Umparametrisierung (i.H. $f'(t') > 0 \quad \forall t' \in [t'_1, t'_2]$)
 z.B. $f(t') = 10t'$, $t'_1 = \frac{1}{10}t_1$

$\tilde{c} := c \circ f$ der umparametrisierte Weg

$$\sim \tilde{c}: [t'_1, t'_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

dann
z.B.

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}} g \, d\underline{s} &= \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \, g(\tilde{c}(t')) \, \dot{\tilde{c}}(t') \\ &= \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \, g(c(f(t'))) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt'} c(f(t'))}_{\text{subst. } t := f(t')} \\ &= \int_{f(t'_1)}^{f(t'_2)} dt \, g(c(t)) \, \dot{c}(t) \\ &= \int_c g \, d\underline{s} \end{aligned}$$

$\dot{\tilde{c}}(f(t')) \cdot \frac{df}{dt'}$

$f(t'_2) = t_2$
 $f(t'_1) = t_1$

Def: Vektorfeld $\underline{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Konservativ

$$\Leftrightarrow \exists g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \underline{V} = \underline{\nabla} g$$

(g heißt dann "Potential" von $\underline{V}$)

Satz $\underline{V}$ konservativ $\Rightarrow \int_c \underline{V} \cdot d\underline{s} = g(\underline{c}(t_2)) - g(\underline{c}(t_1))$

$c: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Bew: Es ist $\frac{d}{dt}(g \circ c)(t) = \frac{d}{dt} g(c_x(t), c_y(t), c_z(t))$

(3)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bigg|_{\underline{c}(t)} \frac{dc_x(t)}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bigg|_{\underline{c}(t)} \frac{dc_y(t)}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bigg|_{\underline{c}(t)} \frac{dc_z(t)}{dt} \\
 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{\underline{c}(t)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_x(t) \\ \dot{c}_y(t) \\ \dot{c}_z(t) \end{pmatrix} \\
 &= \underline{\nabla \varphi} \bigg|_{\underline{c}(t)} \cdot \underline{\dot{c}}(t) \\
 &\stackrel{\text{hier}}{=} \underline{V}(\underline{c}(t)) \cdot \underline{\dot{c}}(t)
 \end{aligned}$$

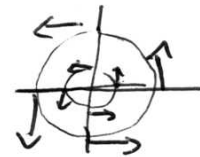
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_C \underline{V} \cdot d\underline{s} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \underline{V}(\underline{c}(t)) \cdot \underline{\dot{c}}(t) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (\varphi \circ c)(t) \\
 &= \varphi \circ c(t_2) - \varphi \circ c(t_1) = \varphi(\underline{c}(t_2)) - \varphi(\underline{c}(t_1))
 \end{aligned}$$

Lemma: Für geschlossene Weg C ist $\int_C \underline{V} \cdot d\underline{s}$ für konservatives V identisch 0

Bsp. i) $\underline{V} = -\gamma \frac{\underline{r}}{r^3}$ (Grav.-Feld, Coulomb-Feld)

Konservativ, da $\underline{V} = \nabla \phi$ mit $\phi = \frac{\gamma}{r}$
(Grav.-Potential, Coulomb-Pot.)

ii) $\underline{V} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (zylindersymm. Wirbel-Feld)



nicht konservativ, denn z.B.

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \underline{\dot{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_C \underline{V} \cdot d\underline{s} &= 2\pi \neq 0 \\
 &\Rightarrow \underline{V}(\underline{c}(t)) \cdot \underline{\dot{c}}(t) = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1
 \end{aligned}$$

Bem. (4)
Wenn $\underline{V}$ konservativ $\Rightarrow V = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^T$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \quad \parallel$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \quad \parallel$$

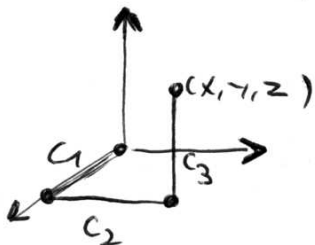
und damit $\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j \right]$

Bsp: $V = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} = +1$

$\Rightarrow V$ nicht konservativ

Wenn $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$ kann man wie folgt ein Potential zu V finden (o.B.d.A. $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mind. 0 im Def.-Bereich)

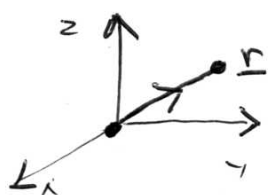
Betrachte Weg C von O nach (x, y, z) :



$$\varphi(x, y, z) = \int_{C_1} \underline{V} d\underline{s} + \int_{C_2} \underline{V} d\underline{s} + \int_{C_3} \underline{V} d\underline{s}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad = \int_0^x V_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y V_y(x, t, 0) dt + \int_0^z V_z(x, y, t) dt$$

oder
(z.B. bei
 V in Kugel-
Koord.)



$$\varphi(r) = \int_0^r dr f(r)$$

$$V = f(r) \cdot \underline{e}_r$$

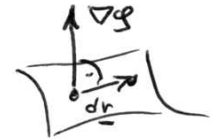
Weitere Vektoroperatoren

Erinnerung: für $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\underline{\nabla} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$

Für bel. Zuwächse $d\underline{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} dg &= \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \\ &= \underline{\nabla} g \cdot d\underline{r} = \langle \underline{\nabla} g, d\underline{r} \rangle \end{aligned}$$

Für $d\underline{r}$ in einer Äquipotentialfläche $g = \text{const}$ ist $dg = 0$,
d.h. $\langle \underline{\nabla} g, d\underline{r} \rangle = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} g \perp d\underline{r}$



Für $d\underline{r}$ von einer Ä. $g = C_1$ zu einer benachbarten Ä. $g = C_2$
ist $dg = \langle \underline{\nabla} g, d\underline{r} \rangle$ maximal,



wenn $d\underline{r} \parallel \underline{\nabla} g \Rightarrow \underline{\nabla} g$ zeigt in Richtg. des
stärksten Anstiegs

Bsp. $g = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \Rightarrow \underline{\nabla} g = f'(r) \cdot \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f'(r) \cdot \underline{e}_r$

$g = \frac{1}{r} \Rightarrow \underline{\nabla} g = -\frac{1}{r^2} \underline{e}_r$ $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}, \dots$

Def. Divergenz

Sei $\underline{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld $\underline{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

dann ist $\boxed{\text{div } \underline{V} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V} := \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$

Bsp. $\underline{V} = \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

$\underline{V} = \underline{r} \cdot f(r) \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \frac{\partial}{\partial x} (x f(r)) + \frac{\partial}{\partial y} (y f(r)) + \frac{\partial}{\partial z} (z f(r))$
 $= 3 f(r) + x \frac{df}{dr} + y \frac{df}{dr} + z \frac{df}{dr} = 3 f(r) + r \frac{df}{dr}$

Def. Rotation

Sei $\underline{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld $\underline{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

dann ist $\text{rot } \underline{V} = \underline{\nabla} \times \underline{V} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Bsp. i) $\underline{V} = \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{0}$

ii) $\underline{V} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (Wirbelfeld)

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{V} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ +\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

iii) $\underline{V} = \underline{\nabla} \varphi$ (Konservatives Feld) $\Rightarrow v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times \underline{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

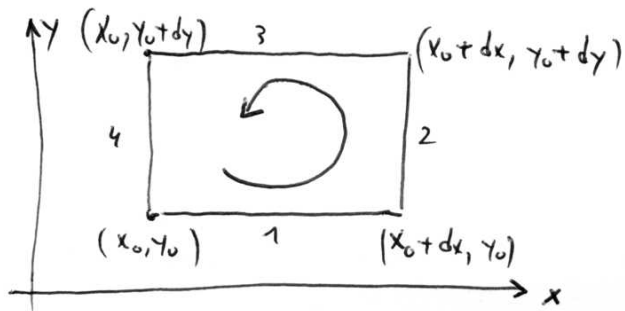
$\Rightarrow$ Konservative Vektorfelder haben verschwindende Rotation!

iv) $\underline{\nabla} \times (f \underline{V}) = f(\underline{\nabla} \times \underline{V}) + (\underline{\nabla} f) \times \underline{V}$

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ dann } \frac{\partial}{\partial y}(f v_z) - \frac{\partial}{\partial z}(f v_y) &= \\ &= f \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} v_z - f \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} v_y \\ &= f(\underline{\nabla} \times \underline{V})_x + (\underline{\nabla} f \times \underline{V})_x \end{aligned}$$

Geometrische Bedeutung

8



Sei $\underline{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld
Betrachte kleine Fläche $dx dy$
in $z=0$ -Ebene (lose z-
Koord. wg.)

Berechne Netto-Zirkulation
entlang des Randes 1234
von $dx dy$:

$$\begin{aligned} \text{Zirkulation}_{1234} &= \int_1 \underbrace{V_x(x,y)}_{=+dx} d\underbrace{s_x}_{=+dx} + \int_2 \underbrace{V_y(x,y)}_{=+dy} d\underbrace{s_y}_{=+dy} \\ &\quad + \int_3 \underbrace{V_x(x,y)}_{=-dx} d\underbrace{s_x}_{=-dx} + \int_4 \underbrace{V_y(x,y)}_{=-dy} d\underbrace{s_y}_{=-dy} \\ &= V_x(x_0, y_0) dx + \left(V_y(x_0, y_0) + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \right) dy \\ &\quad - \left(V_x(x_0, y_0) + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right) dx - V_y(x_0, y_0) dy \\ &= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Zirkulation pro Einheitsfläche} = (\nabla \times \underline{V})_z \quad (\perp z\text{-Achse})$$

(wäre $\underline{V}$ ein Flüssigkeits-Geschw.-Feld könnte man

$(\text{rot } \underline{V})_z$ durch ein Mini-Paddel senkrecht zur z -Achse messen

$\Rightarrow$ Rotationsgeschw. des Paddels $\hat{=}$ Wirbelstärke der Flüssigkeit $\perp z$ -Achse

analog für andere Achsen.

Nacheinander - Anwendung von ∇

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \nabla g &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) \\
 \underbrace{\nabla \cdot \nabla g}_{= \nabla^2 g} &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\
 &=: \Delta g \quad (\Delta = \text{"Laplace-Operator"})
 \end{aligned}$$

Bsp. $\Delta g(r) = \operatorname{div} \operatorname{grad} g(r) = \operatorname{div} \underline{e}_r \cdot g'(r) \stackrel{\text{b.w.}}{=} \frac{2}{r} g'(r) + g''(r)$

$\Rightarrow \Delta r^n = n(n+1)r^{n-2} = 0 \text{ f\"ur } r = -1$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla g) &= \operatorname{rot}(\operatorname{grad} g) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(i.w.: Gradientenfelder sind wirbelfrei)
(insbes. konservativer Felder)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) &= \operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{v}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(i.w.: Die Rotation ist quellenfrei)

→ Berechnung von $\nabla \cdot h(r) \underline{e}_r$

$$\operatorname{div} h(r) \underline{e}_r = \operatorname{div} \frac{h(r)}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h(r)}{r} x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h(r)}{r} y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h(r)}{r} z \right)$$

$$= x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h(r)}{r} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h(r)}{r} \right) + z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h(r)}{r} \right) + 3 \frac{h(r)}{r}$$

$$= x \frac{h'(r) r - h(r)}{r^2} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{= \frac{x}{r}} + \frac{h'(r) r - h(r)}{r^2} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial y}}_{= \frac{y}{r}} + (z) \underbrace{\frac{\partial r}{\partial z}}_{= \frac{z}{r}} + 3 \frac{h(r)}{r}$$

$$= \frac{h'(r) r - h(r)}{r^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} + 3 \frac{h(r)}{r}$$

$$= h'(r) - \frac{h(r)}{r} + 3 \frac{h(r)}{r}$$

$$= 2 \frac{h(r)}{r} + h'(r)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \underline{V}) &= \text{rot}(\text{rot} \underline{V}) \\ &= \text{grad}(\text{div} \underline{V}) - \Delta \underline{V} \quad \left(\Delta \underline{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

Bsp. Maxwell-Gleichungen:

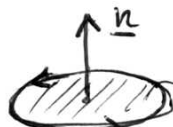
$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \underline{B} = \underline{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Oberflächenintegrale

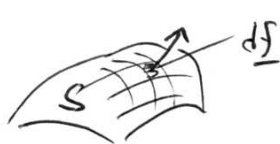


$$\underline{df} = \underline{n} \cdot dA$$

$\underline{df}$ = $\underline{n}$ (Oberflächennormale) $\cdot$ dA (Fläche)
 Flächenelement (Vektor!)

Analog zu Linienintegralen definiert man Flächenintegrale

$$\int_S \varphi \, d\vec{f}, \quad \int_S \underline{V} \cdot d\vec{f}, \quad \int_S \underline{V} \times d\vec{f}$$

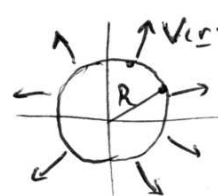


↑
Fluss von $\underline{V}$
durch Fläche S

(beachte: nur Komponente $\underline{n} \cdot \underline{V}$
senkrecht zur Oberfläche trägt bei,
tangentielle Komponenten nicht)

Bsp. $\underline{V} = f(r) \cdot \underline{e}_r$

S = Oberfläche der
Kugel vom Radius R



$$\begin{aligned}\underline{V}(r) &= f(r) \cdot \underline{e}_r \\ d\vec{f} &= \underline{e}_r \cdot dA \\ \Rightarrow \int_S \underline{V} \cdot d\vec{f} &= 4\pi R^2 f(R)\end{aligned}$$

Satz von Gauß

V ein Volumen im $\mathbb{R}^3$, $S = \partial V$ dessen Oberfläche

$\underline{E}$ Vektorfeld (diffbar)

$$\text{Gauß: } \left[\int_{S (= \partial V)} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \int_V \operatorname{div} \underline{E} \, dV \right]$$

(i.W. Fluss von $\underline{E}$ durch Oberfläche von V ist = Integral über alle

Anschaulicher Beweis:

Quellen von $\underline{E}$ in V)

Für infinitesimal kleines, quaderförmiges Volumen $dV = dx \, dy \, dz$

haben wir gezeigt

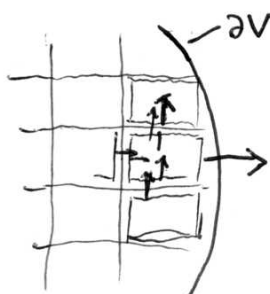
$$\text{Fluss von } \underline{E} \text{ durch } dV = \operatorname{div} \underline{E} \cdot dV$$

||

$$\sum_{\substack{6 \text{ Oberflächen-} \\ \text{Quadrante}}} \underline{E} \cdot d\underline{f}$$



Teile Volumen V in viele kleine quaderförmige Volumen



$\Rightarrow$ Netto-Fluss durch alle aneinander grenzenden Quaderflächen hebt sich auf

$\Rightarrow$ Nur Fluss durch ^{äußere} ~~innere~~ Quaderflächen an der Oberfläche $S = \partial V$ von V bleibt bei Summation

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \underline{E} \, dV &= \sum_{\text{alle Quader in } V} \operatorname{div} \underline{E} \, dV \\ &= \sum_{\text{alle Quaderflächen in } V} \underline{E} \cdot d\underline{f} \\ &= \sum_{\text{alle Quaderflächen an Oberfläche } \partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \int_{\partial V (=S)} \underline{E} \cdot d\underline{f} \end{aligned}$$

Bsp. $\underline{E} = \underline{r}$, $V =$ Kugel mit Radius R
(Mittelpunkt $\underline{0}$)

$\Rightarrow S = \partial V =$ Kugeloberfläche

und $d\underline{f} \parallel \underline{E}$



$$\Rightarrow \int_S \underline{E} \cdot d\underline{f} = \int_S r df = \int_S R df = R \int_S df = 4\pi R^2$$

$$\text{und } \int_V \text{div } \underline{E} \cdot dV = \int_V \underbrace{\text{div } \underline{r}}_{=3} \cdot dV = 3 \int_V dV = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi R^3$$

Green'sches Theorem

Seien u, v zwei skalare Fktn ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\text{Es gilt } \text{div} (u \nabla v) = u \Delta v - (\nabla u) \cdot (\nabla v) \quad (1)$$

$$\text{div} (v \nabla u) = v \Delta u - (\nabla v) \cdot (\nabla u) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_V (1) - (2) &= \int_V \text{div} (u \nabla v - v \nabla u) dV = \int_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\underline{f} \\ &= \int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\underline{f}}$$

Green'sches Theorem

Bem. Es gilt auch $\int_S \underline{g} \cdot d\underline{f} = \int_V \nabla \underline{g} \cdot d\underline{f}$, $\int_S d\underline{f} \times \underline{p} = \int_V (\nabla \times \underline{p}) dV$

Satz von Stokes

Sei S eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, $c = \partial S$ deren Rand
 $\underline{E}$ Vektorfeld (diffbar) (= geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^3$)

Stokes :

$$\oint_{C (= \partial S)} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_S \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f}$$

i.w.: Zirkulation von $\underline{E}$ entlang des Randes ∂S von S
 $=$ Integral über alle Wirbel von $\underline{E}$ in S

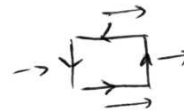
Anschaulicher Beweis:

Für infinitesimal kleine, rechteckige Flächen $df = dx dy$
 hatten wir gezeigt

$$\text{Zirkulation von } \underline{E} \text{ entlang Rand von } df = \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f}$$

||

$$\sum_{4 \text{ Randseiten}} \underline{E} \cdot d\underline{s}$$



Zerlege Fläche S in viele kleine rechteckige Flächen



$\Rightarrow$ Netto-Zirkulation entlang aneinander grenzender Seiten hebt sich auf

$\Rightarrow$ Nur Zirkulation entlang der ^{äußeren} Randseiten am Rand $c = \partial S$ bleibt bei Summation

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_S \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f} &= \sum_{\text{alle Rechtecke in } S} \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f} \\ &= \sum_{\text{alle Randseiten in } S} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \sum_{\text{alle Randseiten in } \partial S} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_{\partial S (= C)} \underline{E} \cdot d\underline{s} \end{aligned}$$

Bsp.

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

$S =$ Kreisscheibe mit Radius R ,
Mittelpunkt 0 , $\perp$ z -Achse

$$\Rightarrow G = \partial S = \text{Kreis } \perp \text{ } z\text{-Achse} \\ \text{in } x,y\text{-Ebene}$$

$$\text{und } d\underline{s} \parallel \underline{E}$$



$$\Rightarrow \int_G \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} c'(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\ = 2\pi R^2$$

$$\text{und } \int_S \text{rot } \underline{E} \, d\underline{f} = \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\underline{f} \end{pmatrix}$$

(Beachte
 $S \perp z\text{-Achse}$

$$\Rightarrow \underline{s} \parallel \text{---})$$

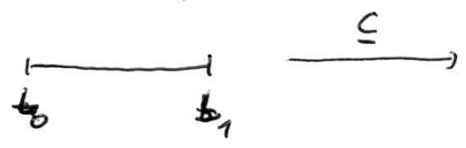
$$= 2 \int_S d\underline{f} \\ = 2\pi R^2$$

Oberflächenintegrale

Erinnerung:

Raumkurven im $\mathbb{R}^3$

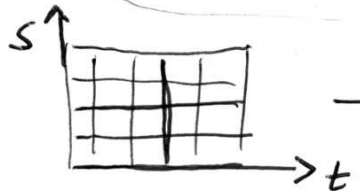
$\hat{=}$ Abb.



$$t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} c_x(t) \\ c_y(t) \\ c_z(t) \end{pmatrix} \hat{=} \text{Wegparametrisierung}$$

Analog: Oberflächen

$\hat{=}$ Abb.



$$(t, s) \mapsto \underline{\phi}(t, s) = \begin{pmatrix} \phi_x(t, s) \\ \phi_y(t, s) \\ \phi_z(t, s) \end{pmatrix} \hat{=} \text{Flächenparametrisierung}$$

Bsp.

Ebene

$$(t, s) \mapsto \underline{a} + t \underline{v}_1 + s \underline{v}_2$$

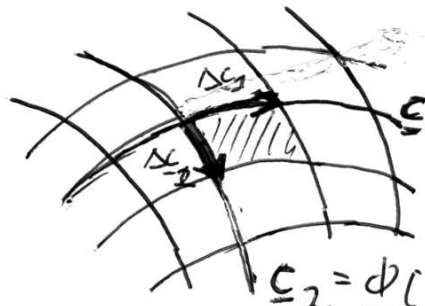
Obere Halbkugel

$$(t, s) \mapsto \begin{pmatrix} t \\ s \\ \sqrt{R^2 - s^2 - t^2} \end{pmatrix} \text{ mit } s^2 + t^2 < R^2$$

Sphäre ohne Nullmeridian

$$(\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \text{ mit } 0 < \varphi < 2\pi$$

Flächeninhalt von Flächenstücken:



$$\underline{C}_1 = \underline{\phi}(\dots, s)$$

$$\Delta \underline{C}_1 = \frac{d\underline{C}_1}{dt} \Delta t$$

$$\Delta \underline{C}_2 = \frac{d\underline{C}_2}{ds} \Delta s$$

$$\underline{C}_2 = \underline{\phi}(t, \dots)$$

$$\textcircled{*} \quad d\underline{f} = \Delta \underline{C}_1 \times \Delta \underline{C}_2 = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \times \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial s} \Delta t \Delta s$$

$$\Rightarrow d\mathcal{F} = |d\underline{f}| = \sqrt{|\Delta \underline{C}_1|^2 \cdot |\Delta \underline{C}_2|^2 \sin^2 \angle \Delta \underline{C}_1, \Delta \underline{C}_2}} = \dots$$

$$= \sqrt{|\Delta \underline{c}_1|^2 \cdot |\Delta \underline{c}_2|^2 - \langle \Delta \underline{c}_1, \Delta \underline{c}_2 \rangle^2}$$

$$= \sqrt{\left| \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial s} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}, \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial s} \right\rangle^2} \cdot \Delta t \cdot \Delta s$$

$$\Rightarrow F = \int_S d\mathbf{f} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{s_0}^{s_1} ds \sqrt{\underline{\phi}_t^2 \underline{\phi}_s^2 - \langle \underline{\phi}_t, \underline{\phi}_s \rangle^2}$$

Bsp. $\phi: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Kugeloberfl. mit Radius r

$(\varphi, \theta) \longmapsto \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\phi}_\varphi^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

$$\underline{\phi}_\theta = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\phi}_\theta^2 = r^2$$

$$\langle \underline{\phi}_\varphi, \underline{\phi}_\theta \rangle = 0$$

$$\Rightarrow F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} = r^2 \cdot 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{=2} = 4\pi r^2$$

Vektorielles Oberflächenintegral / Fluss von $\underline{V}$ durch Oberfl.

abh. von Parametrisierung

$$\int_S \underline{V} \cdot d\underline{\mathbf{f}} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{s_0}^{s_1} ds \underline{V}(\underline{\phi}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \Big|_{\underline{\phi}(s, t)} \times \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial s} \Big|_{\underline{\phi}(s, t)} \right)$$

$\underline{V}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld,

$\underline{\phi}: [t_0, t_1] \times [s_0, s_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Parametrisierung von S

Bsp. $S =$ Halbkugeloberfl. mit Radius r ,

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = \phi_s \times \phi_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ -r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \end{pmatrix}$$

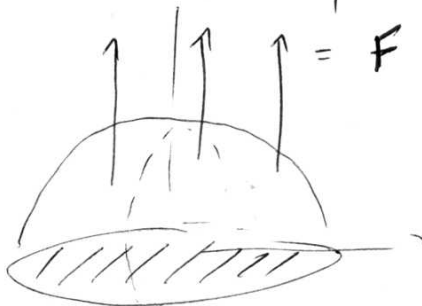
$$= -r \sin \theta \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{V} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) = -r^2 \sin \theta \cos \theta = \underline{r}$$

$$\int_S \underline{V} \cdot d\underline{s} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta F r^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= F 2\pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= F \pi r^2 = F \cdot \text{Fläche der Kreisscheibe } K \text{ unter der Halbkugel } HK$$



klar, da $\text{div } \underline{V} = 0$ und damit

$$-F \pi r^2 = \int_K \underline{V} \cdot d\underline{s} = - \int_{HK} \underline{V} \cdot d\underline{s}$$

Volumenintegration

18

Parametrisierung eines 3d Volumens: $\phi: I_1 \times I_2 \times I_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underline{r} = \underline{\phi}(s, t, u)$$

$$dx dy dz = dV = \left| \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial s} \times \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial u} \right) \right| ds dt du$$

Skalarprodukt



$$= \left| \det \left(\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial s}, \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}, \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial u} \right) \right| ds dt du$$

$$= \left| \det J(\phi) \right|$$

$$\int_V f(\underline{r}) dV$$

Jacobi-Determinante

$$I_1 \times I_2 \times I_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s, t, u) \mapsto \underline{r} = \underline{\phi}(s, t, u)$$

$$= \int_{I_1 \times I_2 \times I_3} ds dt du f(\underline{\phi}(s, t, u)) \cdot \det J(\phi)$$

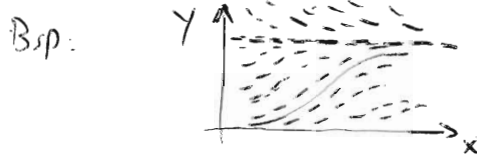
Entspricht dem Transformationsatz in 3d!

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Def.: Gewöhnl. DGL 1. Ordg: $\boxed{y' = f(x, y)}$ (*)
 $(y' = \frac{dy}{dx})$

Def. Sei $y(x)$ Lsg. v. (*) mit $y(x_0) = y_0$
 Dann ist $y(x)$ eine Lsg. des Anfangswertproblems
 $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$

Bem. i) $f(x, y)$ wird auch "Richtungsfeld" genannt



ii) Verallgemeinerung: $y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$
 gew. DGL n-ter Ordg.

iii) Lsg. existiert fast immer, ebenso fast immer eindeutig

Bsp. a) $y' = dy$ $dy \neq \text{const.}$ (**)

$y(x) = e^{dx}$ ist Lsg., denn $\frac{dy}{dx} = d e^{dx} = dy$

allgem. Lsg. $\tilde{y}(x) = c e^{dx}$ (***)

(d.h. jede Lsg. v. ** hat die Gestalt ~~(***)~~)

Bem.: Sei $\tilde{y}$ eine weitere Lsg. v. **,

$$\begin{aligned} \text{dann ist } \frac{d}{dx} (\tilde{y} e^{-dx}) &= \tilde{y}' e^{-dx} - d \tilde{y} e^{-dx} \\ &= \cancel{d \tilde{y}} e^{-dx} - d \tilde{y} e^{-dx} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{y} e^{-dx} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \tilde{y} = \text{const.} \cdot e^{dx} \quad \square \quad)$$

Lsg. d. Anfangswertproblems $y' = \lambda y$, $y(x_0) = y_0$
 ist dann $y(x) = \underbrace{y_0 e^{-\lambda x_0}}_{=C} \cdot e^{\lambda x} = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$

b) $y' = y^2$ (b)

Wg. $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$ ist $y(x) = -\frac{1}{x}$ eine Lsg. von (b)

Bem. Eine DGL $y' = f(y)$ nennt man autonome DGL
 Sei $y(x)$ Lsg. v. $y' = f(y)$.

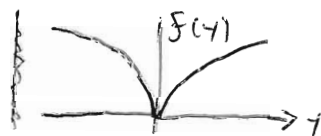
Dann ist auch $y(x-c)$ eine Lsg. von $y' = f(y)$.

Bew: $\frac{d}{dx} y(x-c) = y'(x-c) = f(y(x-c))$ $\square$

Damit ist $y(x) = -\frac{1}{x-c}$ allgem. Lsg. von (b)

c) $y' = \sqrt{|y|}$

$y=0$ ist Lsg.



& $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$ und $2\sqrt{|x^2|} = 2|x|$ für $x > 0$ ist Lsg.

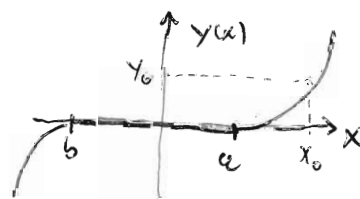
& $y = -x^2 \Rightarrow y' = -2x$ und $2\sqrt{|-x^2|} = 2|x|$ für $x < 0$ ist Lsg.

also $\forall c$ ist $y = (x-c)^2$ für $x > c$ Lsg.

$y = -(x-c)^2$ für $x < c$ Lsg.

Eine Lsg. auf ganz $\mathbb{R}$ ist dann

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{für } x \geq a \\ 0 & \text{für } b \leq x \leq a \\ -(x-b)^2 & \text{für } x \leq b \end{cases}$$



Bem: i) $f(x,y)$ stetig diffb. $\Rightarrow$ Eindeutigkeit d. Lsg. des Anfangswertproblems
 ii) Satz v. Picard-Lindelöf garantiert Existenz

Einfache integrierbare DGL

$$1) \boxed{y' = f(x)} \Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} + y_0$$

$$\text{Bsp: } y' = x^2, y(x_0) = y_0 \Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^x d\tilde{x} \tilde{x}^2 + y_0$$

$$= \frac{\tilde{x}^3}{3} - \frac{x_0^3}{3} + y_0$$

2) DGL mit getrennten Variablen

$$\boxed{y' = f(x) g(y)} \quad (*)$$

a) Bestimme Nullstellen von $g(y)$, d.h. $g(y_i) = 0 \quad \forall i$ Dann ist z.B. $y(x) = y_i$ (=const) Lsg.b) Falls $y \neq y_i \quad \forall i$, d.h. $g(y) \neq 0 \quad \forall y \neq y_i$

$$(*) \Rightarrow \boxed{\frac{y'}{g(y)} = f(x)} \quad (**)$$

Sei $\phi(z)$ Stammfkt. von $\frac{1}{g(z)}$, d.h. $\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{g(z)}$

$$\text{Dann ist } \frac{d}{dx} \phi(y(x)) = \phi'(y(x)) \cdot y'(x)$$

$$= \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} \phi(y(x)) = f(x)} \quad (***)$$

Sei $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$, d.h. $\frac{dF}{dx} = f(x)$

$$\Rightarrow \phi(y(x)) = F(x) - c$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \phi^{-1}(F(x) - c)}$$

$$(\text{Physiker-Schreibweise: } (***) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

$$\Rightarrow \left[\int_{y_0}^y \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = \int_{x_0}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \right], \text{ dann auflösen nach } y$$

Bem. Die autonome DGL $y' = f(y)$ ist Spezialfallmit $f(x) = f(y)$ ist Spezialfall

$$\text{dann } y' = c'(x) \varphi(x) + c(x) \varphi'(x) \stackrel{!}{=} \overbrace{a(x) c(x) \varphi(x)}^{= y} + b(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) \varphi(x) = b(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = \frac{b(x)}{\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow c(x) = \int dx \frac{b(x)}{\varphi(x)} + \text{const.}$$

Bsp. $y' = -xy + x$

hom. GL: $y' = -xy \leadsto \frac{y'}{y} = -x \leadsto \ln y = -\frac{x^2}{2} \leadsto y = e^{-x^2/2}$

allg. Lsg $y(x) = c e^{-x^2/2}$, d.h. $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$

Ansatz f. spes. Lsg $y(x) = c(x) e^{-x^2/2}$

$$\leadsto c'(x) = \frac{b(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{e^{-x^2/2}} = x e^{+x^2/2}$$

$$\leadsto c(x) = e^{x^2/2}$$

$$\leadsto y(x) = e^{x^2/2} e^{-x^2/2} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Allgem. Lsg. d. inhom. GL: } y(x) = 1 + c e^{-x^2/2}$$

Aufgabenwertproblem: $y(x_0) = y_0$ l.h. $1 + c e^{-x_0^2/2} = y_0$

$$\Rightarrow c = (y_0 - 1) e^{x_0^2/2}$$

Gekoppelte DGL's 1. Ordnung

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t)$$

bzw. mit

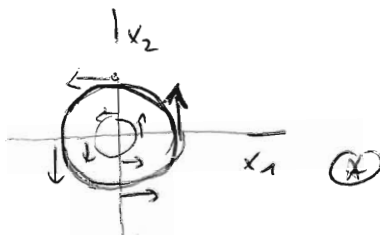
$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)}$$

Bsp.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$



Def. $\underline{v} := \dot{\underline{x}}$, dann $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ Geschwindigkeitsfeld
der Bahnkurve $\underline{x}(t)$

$$\text{Lsg.: } \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} A \cos(t-t_0) \\ A \sin(t-t_0) \end{pmatrix}$$

(A, t₀ freie Parameter
Amplitude Anfangszeit)

Für autonome DGL

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})}$$

heißt $\underline{f}(\underline{x})$ "Richtungsfeld" ($\leftarrow$ determiniert zeitliche
Entwicklung von $\underline{x}$ in
jedem Punkt $\underline{x}$ wie in $\otimes$)
od "Geschwindigkeitsfeld"

Bem i) Wenn $\underline{f}(\underline{x}, t)$ stetig diffbar folgt Eindeutigkeit der Lsg.
des Anfangswert-Problems $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

ii) Formale Lsg. von $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$:

$$\boxed{\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \underline{f}(\underline{x}(\tau), \tau)} \hat{=} \text{Integralgleich.}$$

iii) Diskretisierung: $\underline{x}(t + \Delta t) = \underline{x}(t) + \Delta t \cdot \underline{f}(\underline{x}(t), t) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$
 $\leadsto$ Euler-Verfahren zur numerischen Integration der DGL 104

iv) Verallgemeinerung: auf N gekoppelte DGL

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)^T, \quad \underline{f} = (f_1, \dots, f_N)^T \quad \text{mit } f_i = f_i(\underline{x}, t)$$

ebenso: $\underline{\ddot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$.

v) DGL'n 2. Ordnung kann man auf DGL'n 1. Ordg. zurückföhren: Betrachte DGL 2. Ordg. f. $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$:

$$\boxed{\underline{\ddot{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)} \quad \left(\text{Bsp. Newton'sche Bewegungsgl.,} \right. \\ \left. \underline{F} = \text{Kraft/Masse} \right)$$

Def. $\underline{y} := \underline{\dot{x}}$ (d.h. föhre Geschwindigkeiten $\underline{y}$ als neue Variablen ein)

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x}} = \underline{\dot{y}}$$

und $\otimes \hat{=}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\dot{x}} = \underline{y} \\ \underline{\dot{y}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{y}, t) \end{array}}$$

also mit

$$\begin{array}{l} \underline{\tilde{x}} = (\underline{x}, \underline{y}) \\ \underline{\tilde{F}} = (\underline{y}, \underline{F}) \end{array}$$

$$\boxed{\underline{\dot{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{F}}(\underline{\tilde{x}}, t)} \\ \text{DGL 1. Ordg.}$$

Aufangswertproblem f. DGL 2.-ter Ordg. $\underline{\ddot{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{\dot{x}}, t)$

$$\text{mit } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0,$$

$$\underline{\dot{x}}(t_0) = \underline{v}_0 = \underline{y}(t_0)$$

Bsp. $\ddot{x} = -kx$ (Hochelies Garab)

Def. $y := \dot{x} \rightsquigarrow$

$$\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{array}$$

$$\text{Lsg. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sin \sqrt{k}(t-t_0) \\ \sqrt{k} \cos \sqrt{k}(t-t_0) \end{pmatrix}$$

Schwingung mit Frequenz $\sqrt{k}$

vi) Newton'sche Bewegungsgl. für Masspunkt $\underline{r}(t)$

im zeitl. konstanten, konservativen Kraftfeld ladet $(\underline{r} = (x, y, z))$

$$m \underline{\ddot{r}} = \underline{F}(\underline{r}) = - \underline{\nabla} \phi(\underline{r}), \quad \phi(\underline{r}) = \text{Potential, oder} \\ \text{potentielle Energie}$$

Def. Impuls $\underline{p} := m \underline{v} = m \underline{\dot{r}}$

$$\text{dann ist } \boxed{\underline{\dot{p}} = - \underline{\nabla} \phi(\underline{r})} \quad (N)$$

In TP 1 werden Sie lernen, dass man die Newtonschen Beweg.-gl. (N) auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\text{Sei } H = \frac{mv^2}{2} + \phi(x) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \phi(x)}$$

die Gesamtenergie des Massepunktes ($\frac{p^2}{2m}$ = kinetische Energie)
auch "Hamilton-Funktion" genannt.

Damit kann man (N) schreiben als

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} & \text{bzw.} & \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} & \text{bzw.} & \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Das sind die Hamilton'schen Bewegungsgl. $\hat{=}$ System gekoppelter DGL 1. Ordg.
($\Leftrightarrow$ Newton'sche Bewegl. $\hat{=}$ System gekoppelter DGL 2. Ordg.)

Lineare DGL 2. Ordg.

$$\text{Homogene lineare DGL 2. Ordg: } \boxed{y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0} \quad (*)$$

Bem. allgemeine Lsg. der hom. lin. DGL 1. Ordg $y' + a_0(x)y = 0$

ist $y(x) = C_1 q(x)$, $q(x)$ eine Lsg., $C_1 \in \mathbb{R}$ beliebig
↳ wird aus Aufg. $y(0) = y_0$ bestimmt

Analog: allgemeine Lsg. von (*) ist

$$\boxed{y(x) = C_1 q_1(x) + C_2 q_2(x)}$$

wobei q_1, q_2 zwei lin. unabh. Lsgn. von (*) sind

(d.h. $\forall C \in \mathbb{R}: q_2(x) \neq C q_1(x)$) Bezeichnung: q_1, q_2 bilden
und $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebig Fundamentalsystem

$\Leftrightarrow$ LA: die Lsgn. von (*) bilden einen 2-dim. Untervektorraum
des (un-dim) Vektorraumes der diffbaren Funktionen

Bem: Analogie zur LA besteht, weil $\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x) \right\}$

$$\text{mit } r = +91. \quad \text{...}$$

(DGL 10)

$$\Rightarrow \text{allgemeine Lsg. ist } y(x) = C_1 e^{-\gamma x + i\omega x} + C_2 e^{-\gamma x - i\omega x}$$

$$= e^{-\gamma x} (C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x})$$

$$= C_1 (\cos \omega x + i \sin \omega x) + C_2 (\cos \omega x - i \sin \omega x)$$

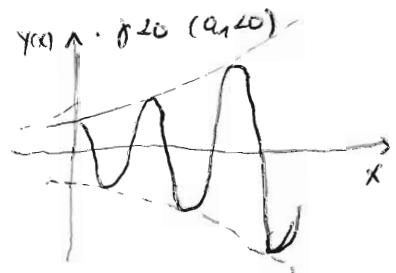
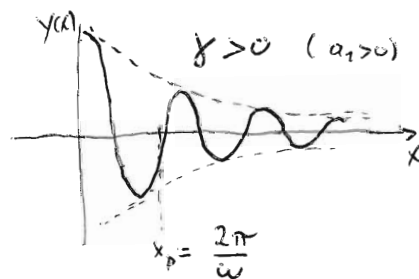
$$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{\tilde{C}_1} \cos \omega x + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_{\tilde{C}_2} \sin \omega x$$

$$y(x) = e^{-\gamma x} (\tilde{C}_1 \cos \omega x + \tilde{C}_2 \sin \omega x)$$

Bem. C_1 und C_2 können offensichtlich auch komplex gewählt werden, $y(x)$ bleibt dann immer noch Lsg. von $(*)$.

Wählt man $\tilde{C}_1$ und $\tilde{C}_2$ reell bleibt die Lsg. $y(x)$ reell.

Verlauf d. Lsg.:



Für $\gamma > 0$: "gedämpfte Schwingung" mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{a_0 - \frac{\gamma^2}{4}}$
 (d.h. Schwingungsperiode $\frac{2\pi}{\omega}$)
 und Dämpfungskonstante $\gamma = \frac{a_1}{2}$

Bem. i) $(*)$ ist Bewegungsgleich. f. gedämpften harmonischen Oszillator
 ($x \leftrightarrow t$ "Zeit")

ii) Wie $e^{-(\gamma-i\omega)x}$ und $e^{-(\gamma+i\omega)x}$ bilden
 $e^{-\gamma x} \cos \omega x$ und $e^{-\gamma x} \sin \omega x$ Fundamentalsystem für $(*)$
 (Beweis durch Einsetzen in $(*)$)

iii) Exponentialansatz $y(x) = e^{sx}$ führt allgemein auf Lsg.
 für hom. lin. DGL n. Ordg $y^{(n)} + \sum_{m=0}^{n-1} a_m y^{(m)} = 0$
 $\Rightarrow$ charakterist. Gldg. für s : $s^n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m s^m = 0 \Rightarrow$ i.d. n

3. Fall $a_1^2 = 4a_0 \Rightarrow s_1 = s_2 = -\frac{a_1}{2} = -\gamma$

J.h. Exponentialansatz $y(x) = e^{sx}$ führt nur auf eine Lsg. $y(x) = e^{-\gamma x}$

Es gibt dennoch eine 2. Lsg.: $\boxed{y(x) = x e^{-\gamma x}} \quad \oplus$

$$\begin{aligned}
 \text{Bew.: } y'' + a_1 y' + a_0 y &= \frac{d^2}{dx^2}(x e^{-\gamma x}) + a_1 \frac{d}{dx}(x e^{-\gamma x}) + a_0 x e^{-\gamma x} \\
 &= \underbrace{-2\gamma e^{-\gamma x} + \gamma^2 x e^{-\gamma x}}_{\gamma = \frac{a_1}{2}} + a_1 e^{-\gamma x} - a_1 \gamma x e^{-\gamma x} + a_0 x e^{-\gamma x} \\
 &= \left(\underbrace{-a_1}_{=0} + \underbrace{\frac{a_1^2}{4} x}_{=a_0} + a_1 - \underbrace{\frac{a_1^2}{2} x}_{=-2a_0} + a_0 x \right) e^{-\gamma x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

In diesem Fall ist also $e^{-\gamma x}, x e^{-\gamma x}$ Fundamentalsystem
und $\boxed{y(x) = C_1 e^{-\gamma x} + C_2 x e^{-\gamma x}}$ allgem. Lsg.

Bem. 1) Den Fall $a_1^2 = 4a_0$ nennt man den "aperiodischen Grenzfall" des gedämpften harmonischen Oszillators

ii) Lsgn der Art $\oplus$ existieren ganz allgemein f. hom. DGL n-ter Ord. wenn die charakteristische für s Mehrfach-Nullstelle hat
($x e^{sx}, x^2 e^{sx}, \dots, x^k e^{sx}$) im Falle von $(k+1)$ -fachen Nullst.

Die erzwungene Schwingung (od. der getriebene Oszillator) wird durch die entsprechende inhomogene Gleichg. beschrieben:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (\text{z.B. } f(x) = A \sin \omega t)$$

Fourier-Reihen

Eine Fourier-Reihe ist die Entwicklung einer (periodischen) Funktion in eine Reihe mit $\sin$ und $\cos$.

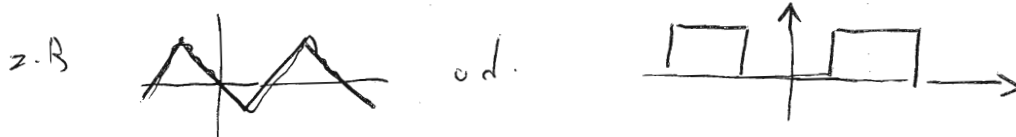
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (*)$$

oder (äquivalent) in eine Reihe mit $e^{\pm i n x}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n x} \quad (**)$$

Zunächst nehmen wir an, $f(x)$ sei 2π -periodisch,

$$\text{i.h.} \quad f(x + 2\pi \cdot k) = f(x) \quad k \in \mathbb{Z}$$



Für den Funktionensatz $e^{i n x}$ ($n \in \mathbb{Z}$) gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{2\pi} (e^{i m x})^* e^{i n x} dx = 2\pi \delta_{m,n}$$

Bew.

$$\int_0^{2\pi} (e^{i m x})^* e^{i n x} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx & \text{f. } n=m \\ \frac{1}{i(n-m)} \left(\underbrace{e^{2\pi i(n-m)}}_{=1} - 1 \right) & \text{f. } n \neq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi & \text{f. } n=m \\ 0 & \text{f. } n \neq m \end{cases}$$

Mit dieser Orthogonalitätsrelation bestimmt man leicht die Fourier-Koeffizienten c_n in $(**)$:

$$\begin{aligned}
 (**) \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-imx} dx \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^{2\pi} (e^{inx})^* e^{imx} dx}_{= 2\pi \delta_{n,m}} \\
 &= 2\pi c_m
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx}$$

Benutzung der Euler-Formel f. $\cos$ und $\sin$ führt zu ähnlichen Orthogonalitätsrelationen für $\cos mx$ und $\sin nx$

$$\underline{m, n \geq 0} \quad \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi \delta_{m,n} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi \delta_{m,n} & m \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

z.B. $\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (e^{imx} + e^{-imx})(e^{inx} + e^{-inx}) dx$

Sei $(m, n) \neq (0, 0)$
 ergibt klar.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \left\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx}_{=0} + \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx + \int_0^{2\pi} e^{i(-m+n)x} dx + \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(-m-n)x} dx}_{=0} \right\} \\
 &= \frac{4\pi}{4} \delta_{m,n} \quad \square
 \end{aligned}$$

Damit lauten die Fourier Entwicklungskoeffizienten a_n, b_n in (*)

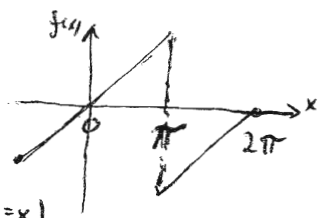
$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Bem. i) Jedes Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + 2\pi$ kann statt $[0, 2\pi]$ verwendet werden.
 ii) $f(x)$ kann aufgefasst werden als Vektor eines unendl. dim. Hilbertraums (der 2π -periodischen Funktionen), und $\{\cos nx, \sin nx\}$ ($n=0, 1, \dots$) bilden eine Basis aus orthogonalen Vektoren (mit geeigneter Def. des Skalarprodukts hier: $\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} dx f^*(x) g(x)$), ebenso $\{e^{\pm i n x}\}$.
 Die Entwicklungskoeffizienten a_n, b_n (bzw. c_n) sind dann die ^{orthogonalen} Projektionen von f auf $\sin, \cos$ (bzw. $\exp$).

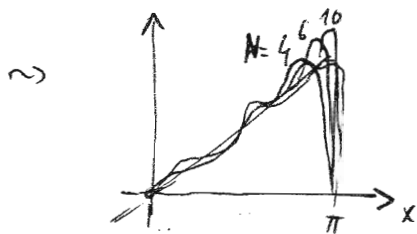
Bsp. Sägezahn-Kurve:

Verkurztes Intervall nach $[-\pi, \pi]$ (dort $f(x)=x$)



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ x - 2\pi & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) = x = 2 \left\{ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right\}$$



$$S_N(x) = \text{s.o. bis } n=N$$

↑ Beweis später

Beobachtung: Genauigkeit der Approximation wächst mit der Zahl der Terme

Alle Kurven $f_N(x)$ gehen durch $f(x)=0$ bei $x=\pi$

→ Verhalten der Fourier-Reihe bei Unstetigkeiten:

Sei $f(x)$ unstetig bei $x=x_0$, d.h. $f(x_{0+}) \neq f(x_{0-})$

dann gilt für die Fourier-Reihe: $f_{FR}(x_0) = \frac{1}{2} \{ f(x_{0+}) + f(x_{0-}) \}$

Beliebige Periodizität:

Sei $f(x)$ periodisch mit Periode $2L$, dann

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

mit

$$\left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right.$$

Bem.: Die Wahl des Integrationsintervalls $[-L, L]$ ist unwesentlich, jedes Intervall $[x_0 - L, x_0 + L]$ od. $[x_0, x_0 + 2L]$ tut es auch.

Bsp.: Sägezahn: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

→ f ungerade (d.h. $f(-x) = -x$)

→ Fourier-Reihe enthält nur Sin-Terme

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \, dx = -\frac{x}{\pi n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos nx \\ &= -\frac{2\pi}{\pi n} \cos n\pi = -\frac{2}{n} \cdot \begin{cases} -1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(x) = 2 \left\{ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right\}$$

Rechteck-welle:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ h & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(FTS)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \, dx = h, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \cos nx \, dx = 0 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h \sin nx \, dx = -\frac{h}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi}$$

$$\leadsto f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) = \begin{cases} 2h/\pi & \text{f. } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{f. } n \text{ gerade} \end{cases}$$

↙ Fourier-Koeffizienten fallen wie $\frac{1}{n}$ ab
physikalisch
↗ viele hohe Frequenzen

Fourier - Transformation

(FT 6)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx' e^{-in\pi x'/L} f(x') e^{in\pi x/L}$$

$$n\pi/L : \omega_n \quad \pi/L := \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\omega \int_{-L}^L dx' e^{-i\omega_n x'} e^{i\omega_n x} f(x')$$

$$\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{i\omega(x-x')} f(x') \quad (*)$$

Def. $\boxed{g(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\omega x} f(x)}$

die Fourier
transformierte
von $f(x)$

Dann ist $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega x} g(\omega)}$

(FT)

Bew. klar wegen (*)

Die Gleich. FT folgt auch aus der Tatsache,
dass $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega(x-x')}$ eine Darstellung der
Dirac'schen δ -Funktion $\delta(x-x')$

Eigenschaften: $\boxed{\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x-x') = f(x')}$
(stetig)

Die δ -Fkt. ist keine Funktion im eigentlichen Sinne ("unergentliche Fkt") und wird mathematisch präzise ~~von~~ in der Theorie der Distributionen definiert.

Physiker rechnen mit ihr wie mit Funktion unter Beachtung einiger Regeln - wichtig ist, dass sie ~~erst~~ erst in Verbindung mit einem Integral über ihren Argument Sinn macht.

$\delta(x)$ kann als Grenzfkt. von Funktionenfolgen aufgefasst werden. z. B.:

$$\text{Def. } \delta_n(x) := \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-nx^2/2} \quad (\text{Gauß-Glocke mit Breite } \sigma_n = \frac{1}{n})$$

$$\delta_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{f. } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Rechteck-Puls mit Fläche 1, Höhe } \frac{n}{2}, \text{ Breite } \frac{2}{n})$$

$$\text{und eben } \delta_n(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{i\omega x} d\omega = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta_n(x-x') \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-n}^n d\omega e^{i\omega(x-x')} f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i\omega(x-x')} f(x') \stackrel{(*)}{=} f(x) \end{aligned}$$

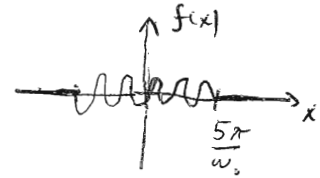
Für gerade oder ungerade Funktionen definiert man cos/sin-Transform

$$\begin{aligned} f(x) \text{ gerad } (f(x) = f(-x)) & \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega \\ \tilde{f}_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \end{aligned}$$

$$f(x) \text{ ungerad } (f(x) = -f(-x)) \Rightarrow \text{wie oben mit } \cos \leftrightarrow \sin$$

Bsp. Endlicher Wellenzug

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\omega_0 x) & |x| \leq \frac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & |x| > \frac{N\pi}{\omega_0} \end{cases}$$



$\rightarrow f(x)$ ist ungerade, berechne sin-Transform

$$g_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{N\pi/\omega_0} \sin(\omega_0 x) \sin(\omega x) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right\}$$

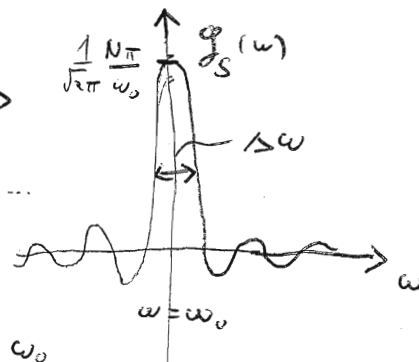
Für ω_0 groß und $\omega \approx \omega_0$

ist nur der 1. Term wichtig $\rightarrow$

Nullstellen bei $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{N}, \pm \frac{2}{N}, \dots$

Beiträge außerhalb des Maximums

sind klein $\Rightarrow$ Breite $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{N}$



$\hat{=}$ Bandbreite der Frequenzen ^{um ω_0} im Wellenzug der Länge N Schwingungen.

N groß $\leadsto$ Frequenzverteilung schärfer

N klein $\leadsto$ —||— breiter

Fourier - Transformierte der Ableitung

(FT 10)

Sei $g(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$ die FT von $f(x)$,

$g_1(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx$ die FT von $f'(x)$

dann mit Hilfe von partieller Integration

$$g_1(\omega) = \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

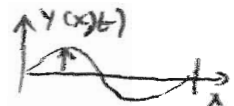
Wenn $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$ (was so sein muss, damit die FT existiert) folgt

$$\boxed{g_1(\omega) = -i\omega g(\omega)}$$

d.h. Differentiation im "Zeit"-Raum entspricht Multiplikation mit ω im "Frequenz"-Raum

$\leadsto$ Verallgemeinerung $\boxed{g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega)}$

Anwendung Wellengleichung f. vibrierende Saite,



$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

mit $y(x,0) = f(x)$

$y(x,t)$ = Auslenkung am Ort x zur Zeit t

Def. Fourier-Transformierte im Raum $Y(k,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(x,t) e^{ikx} dx$

$$\leadsto (-ik)^2 Y(k,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Y(k,t)}{\partial t^2} \quad \text{mit } Y(k,0)$$

gewöhnl. DGL für jedes k

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx =: g(k)$$

$$\leadsto Y(k,t) = g(k) e^{\pm i v k t}$$

$$\leadsto y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ik(x \mp vt)} dk = f(x \mp vt) \quad \square$$

Faltungs- Theorem

Def. $\boxed{f * g := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\gamma) f(x-\gamma) d\gamma}$ Faltung von f & g

Seien $\tilde{g}, \tilde{f}$ die FTs von g, f

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(\gamma) f(x-\gamma) d\gamma &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega(x-\gamma)} d\omega d\gamma \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\gamma) e^{i\omega\gamma} d\gamma \right\} e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die inverse FT eines Produkts von FTs
ist die Faltung $f * g$ der ursprünglichen Funktionen.

Parseval'sche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \tilde{g}^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt$$

Bew.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}^*(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}^*(\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega' d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) \tilde{g}^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Insbes. wenn $f=g$ folgt $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$
(Normierungserhaltung unter FT)

Alle elementaren Funktionen einer reellen Variable x
 x^α wie $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, ...

(x^n , e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\tan$, $\cot$, $\arcsin$, ...))

können auf die komplexe Zahlenebene ausgedehnt werden

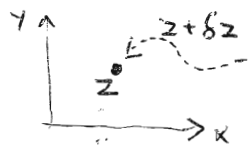
- durch Ersetzung der reellen Variable x durch die komplexe Variable $z (= x+iy)$.

Sei $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion einer komplexen Variable
 $z \mapsto f(z)$

Def. Ableitung von f

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} = \frac{df}{dz}$$

Voraussetzung: $\uparrow$ Limes ist unabhängig von der Wahl der Folge (δz) im komplexen (d.h. Ableit. Richtungs-unabh.)



z.B. $\textcircled{1} \left| \begin{array}{c} z \leftarrow \end{array} \right. = \textcircled{2} \left| \begin{array}{c} \downarrow z \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ Die komplexe Differenzierbarkeit bedeutet eine starke Einschränkung für komplexe Funktionen

Sei $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u,v \in \mathbb{R}$
Realteil Imaginärteil

Sei δ reell, dann gilt für die Richtung $\textcircled{1}$

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta) - f(z)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \{ u(x + \delta + iy) + iv(x + \delta + iy) - u(x + iy) - iv(x + iy) \} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{u(x+\delta, y) - u(x, y)}{\delta} + i \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v(x+\delta, y) - v(x, y)}{\delta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (*)$$

und für die Richtung (2)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(z+i\delta) - f(z)}{i\delta}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{i\delta} \{ u(x+i\gamma+i\delta) + i v(x+i\gamma+i\delta) - u(x+i\gamma) - i v(x+i\gamma) \}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{i} \frac{u(x, y+\delta) - u(x, y)}{\delta} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v(x, y+\delta) - v(x, y)}{\delta}$$

$$= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (**)$$

Die Richtungsableitungen (1) und (2) müssen bei komplexer Diffbarkeit identisch sein, also folgt aus (*) und (**)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (CR)$$

Cauchy - Riemann - Bed.

Satz: $f(z) = u + iv$ komplex diffb. $\Rightarrow u, v$ genügen
(d.h. $\frac{df}{dz}$ existiert) CR-Bed.

Umgekehrt gilt: Sei $f = u + iv$, die partiellen Ableitungen von u, v seien stetig und genügen CR

$$\Rightarrow \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{Bew. selbst})$$

Bsp. i) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{= u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{= v(x,y)}$

$$a) \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ CR erfüllt $\Rightarrow f(z) = z^2$ komplex diffb.
n. f. l. $z = 2.2$

(11.14)

$$ii) f(z) = z^* = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x, v(x,y) = -y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

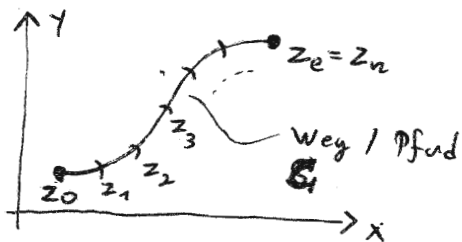
$$\Rightarrow z^* \text{ nicht komplex diffb.}$$

$$iii) f(z) = e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y}_u + i \underbrace{e^x \sin y}_v \Rightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \text{auch } \sin, \cos, \dots \text{ komplex diffbar} \quad \& \quad f'(z) = e^z$$

Def. $f(z)$ analytisch : $\Leftrightarrow f(z)$ komplex diffb. (auf ganz $\mathbb{C}$)
(in z_0) (in einer Umg. v. z_0)

Wegintegrale im Komplexen:



Sei $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$
komplexe Funktion,

$$\gamma: [t_0, t_e] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto z(t) = x(t) + i y(t)$$

ein "glatter" Weg in $\mathbb{C}$

$$\int_{z_0}^{z_e} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_e} dt f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)$$

$$= \int_{t_0}^{t_e} dt \left\{ u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)) \right\} (\dot{x}(t) + i \dot{y}(t))$$

$$= \int_{t_0}^{t_e} dt \left\{ u(x(t), y(t)) \dot{x}(t) - v(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right\}$$

$$+ i \int_{t_0}^{t_e} dt \left\{ u(x(t), y(t)) \dot{y}(t) + v(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \right\} \oplus$$

Bsp. $f(z) = z^n (n \neq -1), z(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ $\leadsto \mathbb{C}$ Kreis um $z=0$.

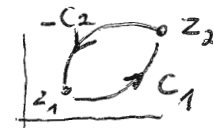
$$\leadsto \int_{\mathbb{C}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{nit} e^{it} = \frac{1}{n+1} e^{(n+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Sei nun C ein geschlossener Weg ($z_e = z_o$) (FT 15)

Wenn $f(z)$ analytisch auf und im Inneren von C gilt der Gauß'sche Integralsatz:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad | \quad CI$$

Insbesondere ist für analytische Funktionen $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ unabhängig von Weg!

Bew.  $\oint_{C_1 - C_2} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = 0$ ✓

Bew. von CI mit Satz von Stokes und CR:

Sei $\underline{s}(t) = (x(t), y(t), 0)^T$ der geschlossene Weg C in der xy -Ebene im $\mathbb{R}^3$

$\underline{F}_r = (u, -v, 0)$ und $\underline{F}_i = (v, u, 0)$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$

Dann ist mit $\oplus$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{t_0}^{t_e} dt \underline{F}_r \cdot \dot{\underline{s}} + i \int_{t_0}^{t_e} dt \underline{F}_i \cdot \dot{\underline{s}} \\ &= \oint_C \underline{F}_r d\underline{s} = \oint_C \underline{F}_i d\underline{s} \\ &\xrightarrow{\text{Satz von Stokes}} \int_A \text{rot}(\underline{F}_r) d\underline{s} \xrightarrow{\text{Stokes}} \int_A \text{rot}(\underline{F}_i) d\underline{s} \end{aligned}$$

woher A die vom geschlossenen Weg C umschlossene Fläche ($\partial A = C$)

Nun ist $\text{rot} \underline{F}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \underline{0}$ mit CR

analog $\text{rot} \underline{F}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{0}$ ✓

also $\oint f(z) dz = 0$ ✓

Beachte: $f(z)$ muss analytisch im Inneren von C sein

$f(z) = \frac{1}{z}$ ist nicht analytisch im Inneren des Einheitskreises

$$C: z(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{dann } \oint_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

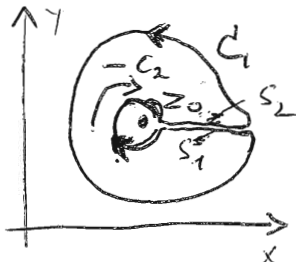
Cauchy'sche Integralformel

Sei $f(z)$ analytisch auf einem geschlossenen Weg C und in dessen Inneren A . Dann gilt für $z_0 \in A$ (also aus dem Inneren von C)
($\partial A = C$)

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)}$$

n.b.: $1/(z - z_0)$ divergiert bei $z = z_0 \in A$, ist also nicht analytisch in A .

Bew.:



Betrachte den Weg $C - C_2$

wobei $C_2: z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
Kreis um z_0 mit Radius $r \ll 1$

Die beiden eingezeichneten geraden Strecken S_1, S_2 werden in jeweils entgegengesetzte Richtung durchlaufen, tragen also bei einer Integration nichts bei

$$\leadsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{C - C_2 + S_1 - S_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \quad \text{da } z_0 \text{ nun außerhalb von } C + S_1 - C_2 + S_2 \text{ liegt}$$

$$\leadsto \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} \cdot i r e^{it} dt$$

also
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0) dt$$
$$= f(z_0) \quad \square$$

Wenn z_0 außerhalb des Weges C_i liegt, ist $f(z)/(z-z_0)$ analytisch im Inneren von C_i , also

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} 0 & \text{für } z_0 \text{ außerhalb von } C_i \\ f(z_0) & \text{--- innerhalb ---} \end{cases}$$

Cauchy'sche Integralformel für die Ableitungen

Sei $f(z)$ analytisch auf und im Inneren des geschl. Weges C_i

$$\frac{f(z_0 + \delta z_0) - f(z_0)}{\delta z_0} = \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \left\{ \oint_C \frac{f(z) dz}{z - (z_0 + \delta z_0)} - \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \right\}$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\delta z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \frac{\delta z_0 f(z)}{(z - z_0 + \delta z_0)(z - z_0)} dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Analog findet man sukzessive für die höheren Ableitungen

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz}$$

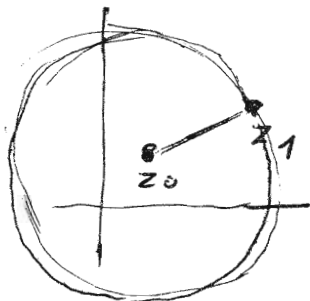
Damit ist auch gezeigt: $f(z)$ analytisch (einmal komplex diffbar)

$\Rightarrow f^{(n)}(z)$ ebenfalls analytisch, also $f(z)$ beliebig oft komplex diffbar!

Taylor - Entwicklung

(FT 18,1)

Sei $f(z)$ analytisch in z_0 und sei $z_1 \in \mathbb{C}$ der nächste Punkt, in dem $f(z)$ nicht analytisch ist



Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$\forall z \quad |z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

die Taylor-Entw. von $f(z)$ um z_0

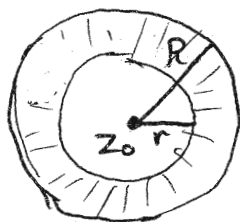
Bsp. $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$

nur konvergent für $|z| < 1$

denn $\frac{1}{1+z^2}$ nicht analytisch in $z = \pm i$

Laurent - Reihe

Oft sind Funktionen analytisch in einem Kreisring R um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R



Dann gilt $\forall z \in R$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{LE}$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}$$

und C' ein geschl. Weg um z_0 in R

LE heißt die Laurent-Entwicklung von $f(z)$ um $z_0 \in R$, sie ist konvergent für $r < |z - z_0| < R$

Bem.: Wenn $r=0$ und $f(z)$ analytisch in z_0 ist

$\forall n < 0$ dann $f(z)(z' - z_0)^{|n|-1}$ analytisch für $|z' - z_0| < R$
also $a_n = 0$ für $n < 0$

Residuensatz

Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ die Laurent-Entw. von $f(z)$ um z_0

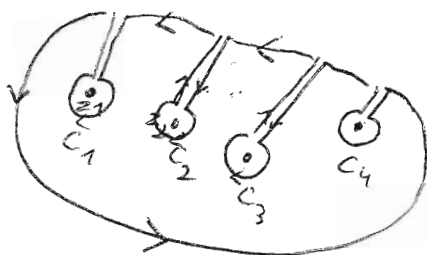
Sei C_i ein geschlossener Weg (im Konvergenz-Kreisring) um z_0
 dann

$$\oint_{C_i} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{\oint_{C_i} (z-z_0)^n dz}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases}}$$

$$= 2\pi i a_{-1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f(z) dz = a_{-1} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{Koeffizient von } \frac{1}{z-z_0} \\ \text{in der LE von } f \\ = \text{"Residuum" von } f \text{ bei } z_0! \end{array}$$

Sei nun C ein geschlossener Weg und $f(z)$ sei analytisch im Inneren von C bis auf isolierte Singularitäten bei $z_1, z_2, z_3, \dots$



Dann ist $f(z)$ analytisch im Inneren des in $\mathbb{C}$ skizzierten Weges

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots = 0$$

Nun ist für alle Singularitäten z_i

$$\oint_{C_i} f(z) dz = -2\pi i a_{-1}(z_i)$$

wg. Integration im Uhrzeigersinn

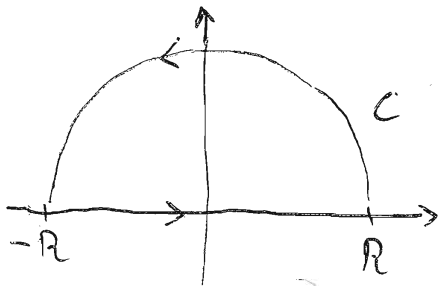
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \oint_C f(z) dz = 2\pi i (a_{-1}(z_1) + a_{-1}(z_2) + \dots) \\ = 2\pi i (\text{Summe aller von } C \text{ eingekl. Residuen}) \end{array} \right|$$

Bsp.

Berechnung von reellen Integralen der Form $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ (FTZ)

mit a) $f(z)$ analytisch in der oberen komplexen Halbebene bis auf endlich viele Pole $(\propto \frac{1}{z-z_i})$, $\operatorname{Re} z_i > 0$

b) $f(z)$ fällt mindestens wie $\frac{1}{|z|^2}$ für $|z| \rightarrow \infty$ ab (i. d. o. Halbebene)



dann

$$\oint_C f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \underbrace{f(Re^{it})}_{\sim \frac{1}{R^2}} \cdot \underbrace{ie^{it} dt}_{\sim \frac{1}{R}}$$

Residuensatz $\rightarrow$ $= 0$

$$= 2\pi i \sum \text{Residuen in obere Halbeb.}$$

z.B. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= 2\pi i \sum \text{Residuen (obere Halbebene)}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i} \Rightarrow \frac{1}{1+z^2} \text{ hat einfache Pole bei } z=\pm i$$

$\Rightarrow z=i$ einziger Pol i. d. oberen Halbebene

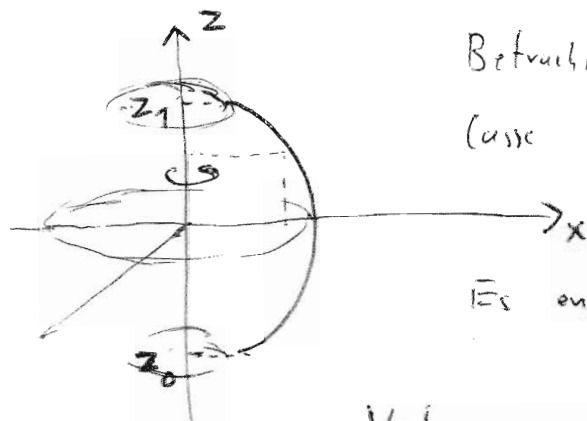
$$\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-1}}{z-i} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-i)^n$$

Entw. um $z_0=i$

$$\Rightarrow a_{-1} = \left. (z-i) \cdot f(z) \right|_{z=i} = \left. \frac{1}{z+i} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Volumen von Rotationskörpern



Betrachte Kurve $x(z) \geq 0, z \in [z_0, z_1]$
(lasse diese variieren um z-Achse.

Es entsteht ein Rotationskörper

Volumen:
$$V = \int_{z_0}^{z_1} dz \pi (x(z))^2$$

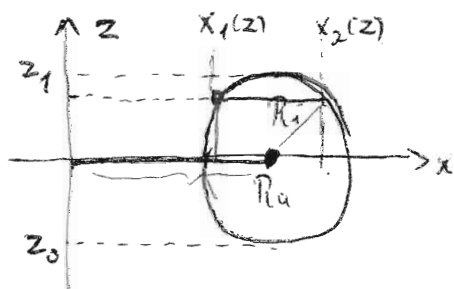
Oberfläche
$$F = \int_{z_0}^{z_1} dz 2\pi x(z)$$

Bsp $x(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ (d.h. $(x(z))^2 + z^2 = R^2$
 $z \in [-R, R]$ also Kreis)

⇒ Rotationskörper ist Kugel mit Radius R

$$V = \int_{-R}^R dz \pi (R^2 - z^2) = \pi \left(R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Falls Fläche nicht bündig mit z-Achse (z.B. Torus):



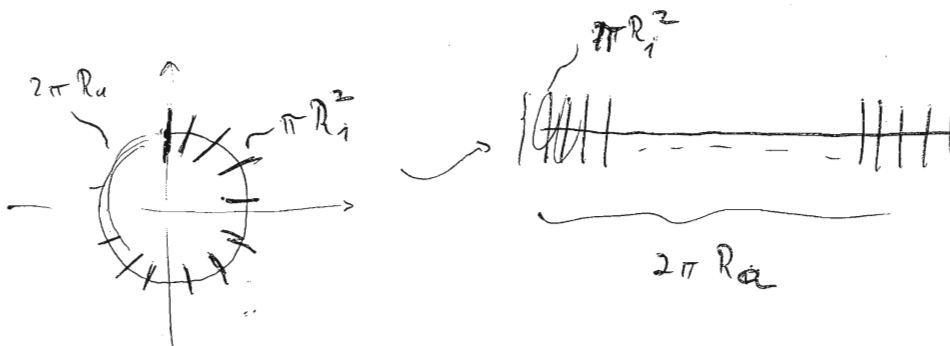
$$V = \int_{z_0}^{z_1} dz \pi \left[(x_2(z))^2 - (x_1(z))^2 \right]$$

Torus $(x - R_a)^2 + z^2 = R_i^2, z \in [z_0, z_1]$

$$\Rightarrow x(z) = R_a \pm \sqrt{R_i^2 - z^2}$$

$$\Rightarrow x_2^2(z) - x_1^2(z) = (R_a + \sqrt{R_i^2 - z^2})^2 - (R_a - \sqrt{R_i^2 - z^2})^2$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-R_1}^{+R_1} dz \pi 4 R_a \sqrt{R_1^2 - z^2} \\
 &= 4\pi R_a R_1 \int_{-R_1}^{R_1} dz \sqrt{1 - \left(\frac{z}{R_1}\right)^2} \\
 &= 4\pi R_a R_1^2 \int_{-1}^1 dz' \sqrt{1 - z'^2} \\
 &= 2 R_a R_1^2 \pi^2 \quad \begin{array}{l} = F \\ = \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram of a semicircle from -1 to 1} \end{array} \\
 &= (2\pi R_a) \cdot (\pi R_1^2)
 \end{aligned}$$



Das Volumen des Torus ist also gleich
dem Volumen eines Zylinders mit Radius R_1 und
Höhe $2\pi R_a$

($\rightarrow$ dieser Zylinder ist einfach zum Torus gelagert)