



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Theoretische Physik I

Klassische Mechanik

Univ. Prof. Dr. Heiko Rieger

Sommersemester 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Mechanik eines freien Massepunkts	8
1.1	Newton'sche Axiome	10
1.1.1	Erstes newton'sches Axiom	10
1.1.2	Zweites newton'sches Axiom	10
1.1.3	Drittes newton'sches Axiom	10
1.2	Einfache eindimensionale Bewegungen	11
1.2.1	Kräftefreie Bewegung mit konstanter Masse	11
1.2.2	Freier Fall	11
1.2.3	Lineare Reibung	13
1.2.4	Freier Fall mit Reibung	13
1.2.5	Harmonischer Oszillator	15
1.3	Allgemeine Sätze	16
1.3.1	Impulssatz	16
1.3.2	Drehimpulserhaltungssatz	16
1.3.3	Definitionen	16
1.4	Energiesatz und Energieerhaltung	18
1.5	Systeme mehrerer Massepunkte	20
1.5.1	Der Schwerpunktsatz	20
1.6	Drehimpulssatz	21
1.7	Energiesatz	22
2	Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten	23
2.1	Holonome Nebenbedingungen	24
2.1.1	Eine rotierende Kreisscheibe	24
2.1.2	Das ebene Pendel	25
2.1.3	Perle auf parabelförmig gebogenem, rotierenden Draht	26
2.2	Nicht-holonome Nebenbedingungen	26
2.2.1	Rollende Kreisscheibe	27
2.3	Die newton'schen Bewegungsgleichungen mit Nebenbedingungen	29
2.3.1	Rollpendel	32
3	Das d'Alembert Prinzip	34
3.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	34
3.1.1	Perle auf beschleunigtem Draht	34
3.1.2	Das Rollpendel	36
3.1.3	Das Teilchen im Kreiskegel	37

Inhaltsverzeichnis

3.1.4	Das Rollpendel	41
3.2	Das Gleichgewichtsprinzip	42
4	Lagrangegleichung 2. Art	43
4.1	Geschwindigkeitsabhängige Potentiale	47
4.2	Newton'sche Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrangegleichung .	48
4.3	Gebrauchsanweisung zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen	48
4.3.1	Teilchen im Kreiskegel	49
5	Symmetrien und Erhaltungsgrößen	51
5.1	Impulse	51
5.1.1	Der kanonische- und der kinematische Impuls	51
5.2	Das Noether Theorem	55
5.2.1	Energieerhaltungssatz	59
6	Die Lagrangegleichungen 1. Art	62
6.1	Gebrauchsanweisung zum Aufstellen der Lagrangegleichungen 1.Art .	64
6.1.1	Das Teilchen im Kreiskegel	64
6.1.2	Das Rollpendel	66
7	Das Hamilton'sche Prinzip	70
7.1	Die Aufgabenstellung in der Variationsrechnung	70
7.1.1	Beispiele	71
7.1.2	Verkürzende Schreibweise	73
7.2	Das Hamilton'sche Prinzip	74
8	Zentralkraftbewegungen	75
8.1	Das Keplerproblem	77
8.2	Das effektive Potential	80
8.3	Streuung im Zentralkraftfeld	82
8.3.1	Der differentielle Streuquerschnitt	83
8.3.2	Die Rutherford Streuung	84
8.3.3	Der Totale Wirkungsquerschnitt	85
9	Beschleunigte Bezugssysteme	86
9.1	Die Corioliskräfte der Erdrotation	90
9.2	Vorgehensweise für N -Teilchen mit Nebenbedingungen im rotierenden Bezugssystem	90
10	Der starre Körper	91
10.1	Das Euler-Theorem	91
10.2	Die kinetische Energie und der Trägheitstensor	92
10.2.1	Zur Rotationsenergie	93
10.2.2	Definition des Trägheitstensors	93
10.2.3	Kinetische Energie eines rollenden Zylinders	95

Inhaltsverzeichnis

10.2.4	Rotierender Quader	96
10.3	Zur Nomenklatur	96
10.4	Der Drehimpuls	96
10.4.1	Der kräftefreie Kreisel	98
10.4.2	Rollender Zylinder	100
10.5	Drehimpulssatz im rotierenden, körperfesten Bezugssystem	101
10.5.1	Kräftefreier symmetrischer Kreisel	104
10.5.2	Der geführte Kreisel	105
10.6	Die Lagrangegleichung für den starren Körper	106
10.7	Der schwere Kreisel	107
11	Lineare Schwingungen	110
11.1	Der harmonische Oszillator	110
11.2	Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden	111
11.2.1	Gekoppelte Oszillatoren	114
11.2.2	Hauptachsentransformation für 2 gekoppelte harmonische Oszillatoren	116
11.3	Die erzwungene Schwingung	117
11.4	Übergang zum schwingenden Kontinuum	119
11.4.1	Allgemein für n Massen	120
11.5	Übergang zum Kontinuum	122
11.6	Lösung der eindimensionalen Wellengleichung	123
11.6.1	Die d'Alembertsche Lösung	124
11.6.2	Die Bernoulli'sche Lösung	124
11.6.3	Allgemeine Lösung der linearen Wellengleichung	125
11.6.4	Die gezupfte Gitarrensaite	126
11.7	Membranschwingungen als Verallgemeinerung der Wellengleichung auf 2 Dimensionen	127
12	Hamilton'sche Mechanik	130
12.1	Die Legendre-Transformation	131
12.1.1	Hamilton'sche Gleichungen	131
12.1.2	Ein geladenes Teilchen im Magnetfeld \mathbf{B}	133
12.2	Hamiltonfunktion und Energie	134
12.3	Das Hamilton'sche Prinzip	135
12.3.1	Der harmonische Oszillator	138
12.4	Die kanonische Transformation	139
12.4.1	Das freie Teilchen	140
12.4.2	Teilchen im homogenen Schwerfeld	141
12.4.3	Der harmonische Oszillator	144
12.4.4	Vertauschung von Koordinaten und Impulsen	145
12.4.5	Punkttransformationen	146
12.5	Kanonische Invarianzen	146
12.6	Invarianz des Phasenraums	147

Inhaltsverzeichnis

12.7 Satz von Liouville	148
12.8 Hamilton-Jacobi-Theorie	151
12.8.1 Gebrauchsanweisung	152
12.8.2 Der harmonische Oszillator	152
12.8.3 Zentralkraftbewegung	153
12.9 Allgemeiner Separationsansatz	153
12.10 Winkel- und Wirkungsvariablen	154
12.11 Integrale und Nicht-Integrale Systeme, Chaos	158
12.11.1 Satz von Liouville	158
12.11.2 Stabilitätsanalyse dieser Tori	159
13 Spezielle Relativitätstheorie	160
13.1 Blitzschlag im Flugzeug	160
13.2 Zeitmessung im „Inertialsystem“ - die Lampen-Spiegel-Uhr	160
13.3 Raumschiff auf dem Weg zum Neptun	161
13.4 Die Lorentz-Transformation	161
13.5 Messvorschriften und Gleichzeitigkeit von Ereignissen	164
13.5.1 Bewegte Uhren	164
13.6 Bewegte Maßstäbe	166
13.7 Vierervektoren und die Lorentzgruppe	167
13.7.1 Die physikalische Bedeutung des Parameters φ	169
13.8 Addition von Geschwindigkeiten	170

Inhaltsverzeichnis

Informationen und Unterlagen zur Vorlesung

Die Homepage des verantwortlichen Professors ist <http://www.uni-saarland.de/fak7/rieger/homepage/teaching.html>. Auf dieser Website sind Informationen zur Übungsgruppeneinteilung, Übungsblätter, zusätzliches Material zur Vorlesung und so weiter zu finden.

Als dringende Literaturempfehlung wird hier „Kuypers - Klassische Mechanik“ angegeben, zum Beispiel zu beziehen unter dieser Adresse

<http://www.amazon.de/>

[Klassische-Mechanik-Beispielen-Aufgaben-Mechanicus/dp/3527409890/ref=sr_1_1?s=books&ie=UTF8&qid=1401916831&sr=1-1&keywords=kuypers](http://www.amazon.de/Klassische-Mechanik-Beispielen-Aufgaben-Mechanicus/dp/3527409890/ref=sr_1_1?s=books&ie=UTF8&qid=1401916831&sr=1-1&keywords=kuypers)

Das Vorlesungsskript orientiert sich stark an Aufbau und Inhalt dieses Werkes.

Wichtige Anmerkungen

Dieses Skript befindet sich noch in einem sehr frühen Stadium des Entstehungsprozesses. Die Abbildungen stammen nicht vom Schreiber, zu allen eingefügten Bildern sind die Quellen angegeben, die Bilder werden schnellstmöglich ersetzt! Fehler sind zu erwarten, es ist hier Vorsicht geboten! Die Hauptüberarbeitung kann wahrscheinlich erst in der vorlesungsfreien Zeit erfolgen, soll aber dann auch gewissenhaft geschehen.

Fehlerfunde bitte **detailliert** - also Absatznummer, Seitenzahl und der Fehler selbst - per Mail an s9fhguen@stud.uni-saarland.de senden. So wird eine schnelle Korrektur der Fehler ermöglicht.

1 Mechanik eines freien Massepunkts

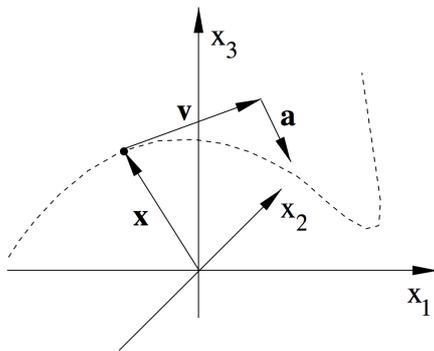


Abbildung 1.1: Bahnkurve im \mathbb{R}^3

Theoretische Mechanik (Skript) - Alexander Altland ; S.12

Allgemeines zu den kanonischen Einheitvektoren:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad i = x, y, z \quad (1.1)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (1.2)$$

Die allgemeine Bahnkurve im \mathbb{R}^3 und allgemeine Ableitungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x} \cdot \mathbf{e}_x + \dot{y} \cdot \mathbf{e}_y + \dot{z} \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x} \cdot \mathbf{e}_x + \ddot{y} \cdot \mathbf{e}_y + \ddot{z} \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Dadurch, dass die Einheitsvektoren in Ihren Komponenten nur von der Zeit unabhängige Funktionen tragen, gibt es keine Kettenregel bei Ableitungen der Bahnkurve. Anders ist das z.B. in ebenen Polarkoordinaten.

1 Mechanik eines freien Massepunkts

Die ebenen Polarkoordinaten sind gegeben durch die Abbildung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

wobei die Einheitsvektoren wieder ein rechtshändiges System bilden und orthogonal zueinander sind (praktisch, siehe Gleichung 1.2).

Dabei ergibt sich:

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Wichtig sind die Beziehungen

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho$$

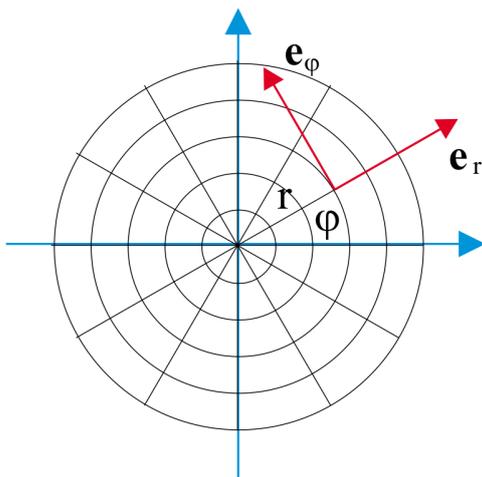


Abbildung 1.2: Ebene Polarkoordinaten mit eingezeichneten Einheitsvektoren

Quelle: Theoretische Physik - Mechanik - Skriptum zur Vorlesung - Prof. Dr. H.J. Kull ; S.39

Damit ergeben sich für die allgemeine Bahnkurve und deren Ableitung in ebenen Polarkoordinaten folgende Beziehungen:

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \cdot \mathbf{e}_\rho \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho}(t) \cdot \mathbf{e}_\rho + \rho(t) \cdot \mathbf{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cdot \mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad (1.7)$$

1.1 Newton'sche Axiome

1.1.1 Erstes newton'sches Axiom

Es gibt Koordinatensysteme (Inertialsysteme), in denen sich ein kräftefreier Massepunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \text{const.} \quad (1.8)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

1.1.2 Zweites newton'sches Axiom

Die Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegendes Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft. Bei konstanter Masse gilt:

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v} \quad (1.10)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (1.11)$$

Das zweite Newton'sche Axiom erlaubt auch Formulierungen für Modelle, bei denen die Masse nicht konstant ist - bei einer Rakete zum Beispiel. Dabei lässt sich sagen

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{m} \cdot \mathbf{v} + m \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad (1.12)$$

1.1.3 Drittes newton'sches Axiom

$$\text{actio} = \text{reactio}$$

Der Kraft mit der die Umgebung auf einen Massepunkt wirkt entspricht stets einer gleichgroßen entgegengesetzten Kraft, mit der der Massepunkt zurückwirkt.

$$\mathbf{F}_{\text{actio}} = -\mathbf{F}_{\text{reactio}} \quad (1.13)$$

1.2 Einfache eindimensionale Bewegungen

1.2.1 Kräftefreie Bewegung mit konstanter Masse

$$\begin{aligned} \text{Bewegungsgleichung: } m\ddot{x} &= 0 & (1.14) \\ \text{Lösung: } x(t) &= x_0 + v_0 \cdot t \end{aligned}$$

Zugehörige Rechnung

Für das kräftefreie Teilchen lautet die newton'sche Bewegungsgleichung

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

Diese Gleichung kann man einfach durch Integration lösen:

$$\int_0^t \ddot{\mathbf{r}}(t') dt' = \dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$$

Die Geschwindigkeit kann keiner Änderung unterliegen, da die Beschleunigung nach Voraussetzung 0 ist. Anschließend integriert man ein zweites Mal, um die Funktion für den Ort des Teilchens zu erhalten.

$$\int_0^t \dot{\mathbf{r}}(t') dt' = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) \cdot t$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0) \cdot t$$

1.2.2 Freier Fall

$$\begin{aligned} \text{Bewegungsgleichung: } m\ddot{x} &= -m \cdot g & (1.15) \\ \text{Lösung: } x(t) &= -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \end{aligned}$$

1 Mechanik eines freien Massepunkts

Zugehörige Rechnung

Die auf das Teilchen wirkende Kraft ist

$$\mathbf{F}_G = -m g \mathbf{e}_z$$

Der allgemeine Ansatz für eine Differentialgleichung 2. Ordnung nach zweifacher Integration (nach t) ist

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2$$

Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}t$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 2\mathbf{c}$$

Mit der newton'schen Bewegungsgleichung folgt

$$\mathbf{F}_0 = m\ddot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F}_0 = m2\mathbf{c}$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{F}_0}{2m}$$

Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot 2\mathbf{c} = \mathbf{a} = \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{b} + 2\mathbf{c} \cdot 0 = \mathbf{b} = \mathbf{v}_0$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2m} \mathbf{F}_0 t^2$$

1.2.3 Lineare Reibung (für geringe Geschwindigkeiten)

$$\text{Bewegungsgleichung: } m\ddot{x} = -\alpha \cdot \dot{x} \quad (1.16)$$

$$\text{Lösung: } x(t) = x_0 + c \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$$

1.2.4 Freier Fall mit Reibung

$$\text{Bewegungsgleichung: } m\ddot{x} = -m \cdot g - \alpha \cdot \dot{x} \quad (1.17)$$

$$\text{Lösung: } x(t) = c_1 + c_2 \cdot \left(e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) - \frac{\alpha}{m}g \cdot t$$

Rechnung zu Teilchen mit konstanter Kraft und Reibung

Für die wirkenden Kräfte auf das Teilchen gilt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 - \alpha\dot{\mathbf{r}} \quad (1.18)$$

dabei ist α der Reibungskoeffizient, der der Geschwindigkeit entgegenwirkt. Die Geschwindigkeit ist konstant, damit gilt $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$.

Dadurch ist bereits eine spezielle Lösung gegeben mit

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_0 - \alpha\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{F}_0$$

Es gilt außerdem $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ und $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}$. Wir bestimmen die Lösung für die homogene Differentialgleichung

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha\mathbf{v} \quad (1.19)$$

mithilfe des Exponentialansatzes

$$\mathbf{v}_i = A_i e^{-\lambda_i t}$$

wobei i immer die i -te Komponente von \mathbf{v} meint.

1 Mechanik eines freien Massepunkts

Daraus folgt

$$\begin{aligned}m\dot{\mathbf{v}}_i &= -\alpha\mathbf{v}_i \\m(A_i)(-\lambda_i)e^{-\lambda_i t} &= -\alpha(A_i)e^{-\lambda_i t} \\-m\lambda_i &= -\alpha \\ \lambda_i &= \frac{\alpha}{m}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

In Superposition mit unserer speziellen Lösung folgt

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{F}_0 + \mathbf{A}e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad (1.20)$$

Daraus folgt sofort für $\dot{\mathbf{v}}$

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \left(-\frac{\alpha}{m}\right)\mathbf{A}e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad (1.21)$$

für die Geschwindigkeit des Teilchens. Die Konstanten \mathbf{A} müssen durch die Anfangsbedingungen ausgedrückt werden.

Nun gilt es noch, die Position des Teilchens zu bestimmen. Für die Anfangsgeschwindigkeit gilt

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \stackrel{1.20}{=} \frac{1}{\alpha}\mathbf{F}_0 + \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\alpha}\mathbf{F}_0$$

Das oben bestimmte \mathbf{A} in die Geschwindigkeitsgleichung eingesetzt liefert

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{F}_0 + \left(\mathbf{v}_0 - \frac{1}{\alpha}\mathbf{F}_0\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

1 Mechanik eines freien Massepunkts

Die Integration nach der Zeit liefert nun den Ort des Teilchens zum Zeitpunkt t

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt \\ &= \mathbf{r}_0 + \int_0^t \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}_0 + \left(\mathbf{v}_0 - \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}_0 \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} dt \\ &= \mathbf{r}_0 + \left[\frac{1}{\alpha} \mathbf{F} t' + \left(e^{-\frac{\alpha}{m} t'} - 1 \right) \frac{1}{-\frac{\alpha}{m}} \left(\mathbf{v}_0 - \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}_0 \right) \right]_0^t \\ &= \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}_0 t + \left(e^{-\frac{\alpha}{m} t} - 1 \right) \left(\frac{m}{\alpha^2} \mathbf{F}_0 - \frac{m}{\alpha} \mathbf{v}_0 \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Ort des Teilchens folgende Gleichung:

$$\mathbf{r}_0 + \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}_0 t + \left(e^{-\frac{\alpha}{m} t} - 1 \right) \left(\frac{m}{\alpha^2} \mathbf{F}_0 - \frac{m}{\alpha} \mathbf{v}_0 \right) \quad (1.22)$$

1.2.5 Harmonischer Oszillator

a) ohne Dämpfung:

$$\begin{aligned} \text{Bewegungsgleichung: } m\ddot{x} &= -k \cdot x & (1.23) \\ \text{Lösung: } x(t) &= A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

b) mit Dämpfung:

$$\text{Bewegungsgleichung: } m\ddot{x} = -k \cdot x - 2m\alpha\dot{x} \quad (1.24)$$

$$\text{Lösung: } x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t + \varphi) & (\alpha < \omega_0) \\ a_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + a_2 e^{-\lambda_2 t} & (\alpha > \omega_0) \\ e^{-\alpha t} (a_1 + a_2 \cdot t) & (\alpha = \omega_0) \end{cases} \quad (1.25)$$

c) Erzwungene Schwingung¹:

$$\text{Bewegungsgleichung: } \ddot{x} + \omega_0^2 + 2\alpha\dot{x} = F \cdot \sin(\omega t) \quad (1.26)$$

¹Anregung mit Kraft in Frequenz \neq Eigenfrequenz

1.3 Allgemeine Sätze

Die nachfolgenden allgemeinen Sätze sollen einen Überblick über allgemeingültige Aussagen geben. Es wird oftmals von **Erhaltungsgrößen** gesprochen, wobei Erhaltungsgrößen Größen sind, die sich in einem Bewegungsablauf nicht ändern, also zeitlich **konstant** sind. Ableitungen von Erhaltungsgrößen nach der Zeit verschwinden deshalb natürlich.

1.3.1 Impulssatz

Der Impulssatz folgt sofort aus dem zweiten Newton'schen Axiom (siehe 1.11) und erlaubt auch Rückschlüsse von der wirkenden Kraft auf den Impuls eines Teilchens.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}$$

Spezialfall $\xrightarrow{\quad} \mathbf{F} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p} = \text{const.}$

1.3.2 Drehimpulserhaltungssatz

$$\begin{aligned} & m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} && | \text{ von links : } \times \mathbf{r} \\ \Leftrightarrow & m \cdot \underbrace{(\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}})}_{\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

1.3.3 Definitionen

Drehimpuls

Der Drehimpuls \mathbf{L} eines Teilchens ist definiert als das Kreuzprodukt aus dessen Ortsvektor \mathbf{r} und seinem Impuls \mathbf{p} . Für den Drehimpuls folgt also

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m \cdot \dot{\mathbf{r}}) = m \cdot \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (1.27)$$

Drehmoment

Das Drehmoment ist das Produkt aus Kraft und Länge eines Hebelarms. Im Fall einer Kreisbewegung berechnet es sich als das Kreuzprodukt des Ortsvektors \mathbf{r} des Teilchens, das sich auf der Kreisbahn befindet, und der Kraft \mathbf{F} , die auf den Körper an der Position \mathbf{r} angreift. Die Länge $|r|$ ist dabei offensichtlich die Länge des Hebelarms relativ zum Bezugspunkt, nämlich dem Anfangspunkt von \mathbf{r} .

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.28)$$

Allgemeine Beziehung

Das Drehmoment ist die Ableitung des Drehimpulses bei konstanter Masse. Durch Ableiten von \mathbf{L} erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{L} &= \frac{d}{dt}(m \cdot \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &= m \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \\ &= m \cdot (\underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{=0, \text{ da } \parallel} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) \\ &= m \cdot \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{r} \times (\underbrace{m \cdot \ddot{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{F}}) = \mathbf{N} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Für den Spezialfall, dass kein Drehmoment angelegt wird, ist der Drehimpuls eine **Erhaltungsgröße**; das bedeutet er ist konstant und demnach verschwindet seine Ableitung nach der Zeit. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (1.30)$$

Die Möglichkeiten für die Drehimpulserhaltung sind, dass keine Kraft auf das Teilchen im Abstand r von der Drehachse wirkt, also kein Drehmoment angelegt wird; oder dass die Kraft parallel zu \mathbf{r} wirkt. Daraus lässt sich die folgende Beziehung für die Kraft angeben

$$\mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{r} \cdot f(r, \dot{r}, t) \quad (1.31)$$

Aus der Drehimpulsgleichung (siehe 1.27) ergibt sich also

$$\mathbf{r} \cdot (m \cdot \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{L} \quad (1.32)$$

1 Mechanik eines freien Massepunkts

Wenn gilt dass $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$ liegt die Bahnkurve senkrecht zu \mathbf{L} . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liegt die Bahnkurve nun in der x-y-Ebene des Koordinatensystems ($\mathbf{L} = L \cdot \mathbf{e}_z$). Da eine Kreisbewegung betrachtet wird, bieten sich ebene Polarkoordinaten an.

$$\begin{aligned} \text{const.} = \mathbf{L} &= m \cdot |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| \\ &= m \cdot |\rho \cdot \mathbf{e}_\rho \times (\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi)| \\ &= m\rho^2\dot{\varphi} \\ &= 2\frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

Aus der obigen Rechnung folgt **der Flächensatz** - das zweite kepler'sche Gesetz:

Der Fahrstrahl des Massenpunktes überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen.

Der Drehimpuls hängt **immer** von der Wahl des Koordinatensystems ab, da er sich auf ein Teilchen mit Abstand r zur Drehachse bezieht.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r} + a \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}_x = \dot{\mathbf{r}}$$

Damit ergibt sich für den Drehimpuls

$$\begin{aligned} L_x &= \mathbf{r}_x \times \mathbf{p}_x \\ &= m \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{p} \\ &= \mathbf{L} + (\mathbf{a} \times \mathbf{p}) \end{aligned}$$

1.4 Energiesatz und Energieerhaltung

Die Arbeit W ist definiert als

$$W := \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.33)$$

also als das vektorielle Wegintegral über ein Kraftfeld.

1 Mechanik eines freien Massepunkts

$$\begin{aligned}dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ \text{Leistung } p &= \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (1.34)$$

Die Bestimmung der kinetischen Energie kann mit der newton'schen Bewegungsgleichung erfolgen

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} \quad | \text{ von links } : \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ \rightarrow m \cdot \left(\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ \Leftrightarrow m \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) &= \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Die kinetische Energie ist definiert als

$$E_{kin} := \frac{m}{2} \cdot \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (1.35)$$

Wenn \mathbf{F} nun konservativ, also **rotationsfrei** ist, gilt

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \exists V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{F} \rightarrow -\nabla V \quad (1.36)$$

wobei V ein Skalarfeld ist. \mathbf{F} ist also immer dann konservativ, wenn es ein Skalarfeld V gibt, aus dem sich das Vektorfeld ableiten lässt. ∇ ist der **Nabla-Operator**. Der Nablaoperator ist definiert als

$$\nabla := \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.37)$$

Die Rotation eines Vektorfeldes ist definiert als

$$\nabla \times \mathbf{F} \quad (1.38)$$

Sind alle Kräfte konservativ, so gilt für die Gesamtenergie eines Systems

$$\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = E = \text{const.} \quad (1.39)$$

Der Satz von Stokes

$$\int \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \, d\mathbf{A} = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} \quad (1.40)$$

Bei konservativen Feldern sieht man schnell, dass $\int \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \, d\mathbf{A} = 0$. Dieses Prinzip ist theoretisch auf n Dimensionen erweiterbar. Das Linienintegral ist also unabhängig vom Weg im Vektorfeld, d.h. man kann einfach bequem zu berechnende Wege wählen.

1.5 Systeme mehrerer Massepunkte

Man betrachte im Folgenden ein System mit N Massepunkten. Jeder Massepunkt der N Teilchen im System sei durch seinen Ortsvektor \mathbf{r}_i mit $i = 1, \dots, N$ charakterisiert. Für jeden einzelnen Massepunkt gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\mathbf{F}_i = m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (1.41)$$

Das Ziel ist der Schwerpunktsatz, nach Newtons drittem Axiom muss nun gelten

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (1.42)$$

Die äußeren Kräfte seien zusammengefasst in den Kräften $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$. Das führt auf die folgende Beziehung

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (1.43)$$

Nun lässt sich der Schwerpunktsatz formulieren.

1.5.1 Der Schwerpunktsatz

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \stackrel{1.42}{=} \overbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}}^{\mathbf{F}^{\text{ext}}} \quad (1.44)$$

Die Gesamtmasse des N Teilchensystems sei nun definiert als

$$M := \sum_i m_i \quad (1.45)$$

Der Schwerpunkt des Teilchensystems genügt der Form

$$\mathbf{S} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (1.46)$$

Nun kann diese Formulierung genutzt werden, um die externen Kräfte auf das System auszudrücken

$$M \cdot \ddot{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (1.47)$$

Der Schwerpunkt eines Massesystems bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte auf ihn wirken würden. Das rechtfertigt nachträglich den Begriff des Massepunkts. In Rechnungen ist es oftmals nützlich, in Schwerpunktkoordinaten zu wechseln.

1.6 Drehimpulssatz

Für die Summe der Drehmomente eines N -Teilchensystems kann man folgende Beziehung feststellen

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i_{\text{ext}}} \quad (1.48)$$

Der Gesamtdrehimpuls im N -Teilchensystem ist definiert als

$$\mathbf{L} := \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}} \quad (1.49)$$

Nach dem Ableiten stellt man fest, dass die Beziehung für ein Teilchen weiterhin für N -Teilchensysteme gilt, nämlich dass das Gesamtdrehmoment des Teilchensystems der Ableitung des Gesamtdrehimpulses entspricht

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (1.50)$$

Wenn nun gilt, dass $\mathbf{r}_i = \mathbf{s} + \mathbf{r}_{i_x}$, dann ist $\sum m_i \mathbf{r}_{i_x} = 0$ und damit ist $\dot{\mathbf{L}} = \sum \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{F}_{i_{\text{ext}}}$

1.7 Energiesatz

Die Summen der Ableitungen der N kinetischen Teilenergien lässt einige Schlüsse auf das System zu - am Ergebnis kann man zum Beispiel ablesen, ob das System konservativ ist oder nicht.

$$\underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right)} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{ij} \mathbf{F}_{ij} \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathbf{F}_{i_{\text{ext}}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.51)$$

Für konservative Kräfte gilt $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$, der Rest (dissipative^[2] Kräfte) wird in den externen Kräften $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ zusammengefasst.

Daraus folgt dann für die Ableitung der Gesamtenergie

$$\frac{d}{dt} [T + V] = \sum_i \mathbf{F}_{i_{\text{ext}}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.52)$$

Man kann sich nun davon überzeugen, dass die Ableitung in konservativen Systemen verschwindet - die Gesamtenergie also eine Erhaltungsgröße ist. Für nicht-konservative Systeme entspricht die Änderung der Energie nun der Summe der Produkte der externen Kräfte mit den Teilchengeschwindigkeiten. In konservativen Systemen muss das Potential V_{ij} wegen $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ nun den Bedingungen

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (1.53)$$

genügen, d.h. V_{ij} ist nur Funktion des Abstandes $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$.

Daraus ergibt sich für die Potentialfunktion $U(r_1, r_2, \dots, r_n)$:

$$U(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_{\text{Paare } ij} w_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + \sum_i U_i(\mathbf{r}_i) \quad (1.54)$$

²Wenn dissipative Kräfte auftreten, gilt die Energieerhaltung zwar weiterhin, aber nicht in der einfachen Form, die sie in konservativen System hat. Die Gesamtenergie wird nun nicht mehr vollständig in kinetische- und potentielle Energie aufgeteilt, sondern z.B. auch in Wärmeenergie, die beispielsweise bei Reibung auftritt.

2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Die geschickte Wahl eines geeigneten Koordinatensystems spart Mühe (z.B. Planetenbewegungen, $V(r) \propto \frac{1}{r}$), ermöglicht manchmal aber auch erst die Lösung eines Problems.

Eine kleine Übersicht über gebräuchliche Koordinatensysteme:

- kartesische Koordinaten
- sphärische Koordinaten
- zylindrische Koordinaten
- elliptische Koordinaten
- parabolische Koordinaten
- ...

Eine wichtige Rolle werden auch kanonische Transformationen spielen, das allerdings erst später in der Vorlesung.

Definition

Generalisierte (verallgemeinerte) Koordinaten := alle Größen, die die Konfiguration einer mechanischen Anordnung kennzeichnen

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

Zusammenhang:

$$\mathbf{x}_n \leftrightarrow \mathbf{q}_n \quad (2.2)$$

wobei \mathbf{x}_n den gewöhnlichen kartesischen Koordinaten entspricht, und \mathbf{q}_n für die generalisierten Koordinaten steht.

2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Zwangsbedingungen (oder auch Nebenbedingungen genannt) ergeben sich dann, wenn der Bewegungsverlauf geometrischen Einschränkungen unterliegt.

Beispiele

- Perle auf Draht
- Zylinder oder Kugel auf einer Fläche
- Körper auf einem Faden

2.1 Holonome Nebenbedingungen

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t) = 0 \quad (2.3)$$

wobei für das freie System $3N$ Koordinaten existieren. k **unabhängige holonome Nebenbedingungen reduzieren die Zahl der Freiheitsgrade eines N -Teilchensystems auf $3N - k$ (bzw. $2N - k$ in 2 Dimensionen)! Es folgen einige klassische Beispiele.**

2.1.1 Eine rotierende Kreisscheibe

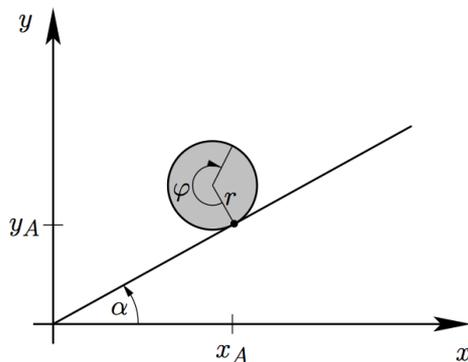


Abbildung 2.1: Ein Zylinder rollt eine schiefe Ebene herunter

Skriptum zur Vorlesung Analytische Mechanik - Andreas Honecker; S.11

Man stelle sich eine Zylinder vor, der eine schräge Ebene herunterrollt. Es wird dabei angenommen, dass der Zylinder seine Richtung nicht ändern kann, um die Bewegung ausreichend zu beschreiben reicht es nun, den zweidimensionalen Querschnitt des Zylinders, also eine Kreisscheibe, zu betrachten, die mit der x -Achse den Winkel α bildet. Die Kreisscheibe hat nur 3 Freiheitsgrade, die jedoch durch die 2 bestehenden holonomen Nebenbedingungen verringert werden; zum einen sind das die Koordinaten des Auflagepunktes der Kreisscheibe (x_A, y_A) und der Rollwinkel φ . Die Zwangsbedingungen sind

$$x_A - r\varphi \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad ; \quad y_A - r\varphi \cdot \sin(\alpha) \quad (2.4)$$

2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Die Bewegung hat also nur noch einen Freiheitsgrad, anschaulich findet die Bewegung also auf einer Geraden statt.

Koordinatensystem : Kartesische Koordinaten
Freie Variablen : φ
Zwangsbedingungen : $x_A - r \cdot \varphi \cos(\alpha) = 0$; $y_A - r \cdot \varphi \sin(\alpha) = 0$

2.1.2 Das ebene Pendel

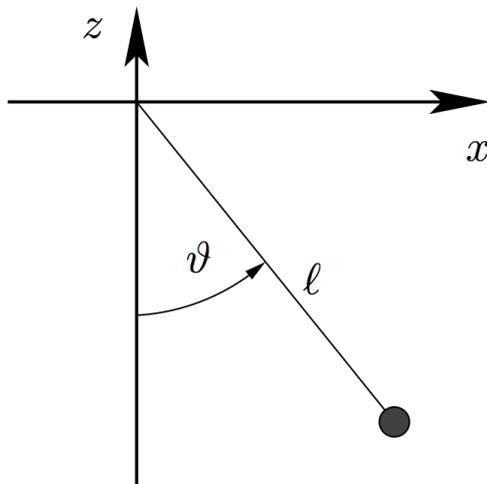


Abbildung 2.2: Skizze eines ebenen Pendels - Eine Masse bewegt sich in konstantem Abstand vom festen Aufhängungspunkt auf einer Kreisbahn

Quelle: Vorlesungsskriptum Analytische Mechanik - Andreas Honecker; S.12

Koordinatensystem : Sphärische Polarkoordinaten
Freie Variablen : φ
Zwangsbedingungen : $l = r$; $\theta = \text{const.}$

→ Bewegung in einer Ebene

2.1.3 Perle auf parabelförmig gebogenem, rotierendem Draht

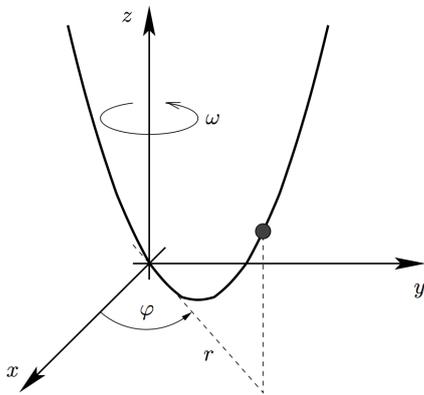


Abbildung 2.3: Eine Perle bewegt sich unter Einfluss der Schwerkraft auf einem parabelförmig gebogenen Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Symmetrieachse rotiert

Koordinatensystem : Zylinderkoordinaten - Rotationssymmetrie (!)
 Freie Variablen : ρ
 Zwangsbedingungen : $\varphi - \omega t = 0$; $z - a\rho^2 = 0$

2.2 Nicht-holonome Nebenbedingungen

Nicht-holonome Nebenbedingungen sind Nebenbedingungen, die sich nicht als Gleichungen formulieren lassen. Es folgen wieder einige Beispiele.

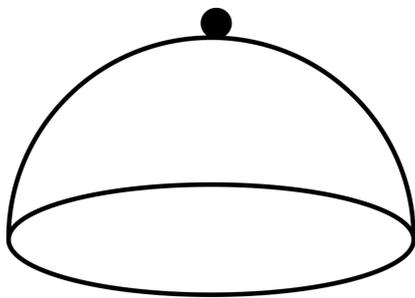


Abbildung 2.4: Ein Teilchen mit Radius r gleitet reibungsfrei und unter Einfluss der Gravitationskraft auf einer Kugel mit Radius R

Die Zwangsbedingung an das System lautet $R'^2 - r^2 \geq 0$

Sobald das Teilchen über den Äquator der größeren Kugel rollt, wird der Abstand d größer als R' und es wirkt nur noch die Gravitationskraft auf das Teilchen mit Radius r .

2.2.1 Rollende Kreisscheibe

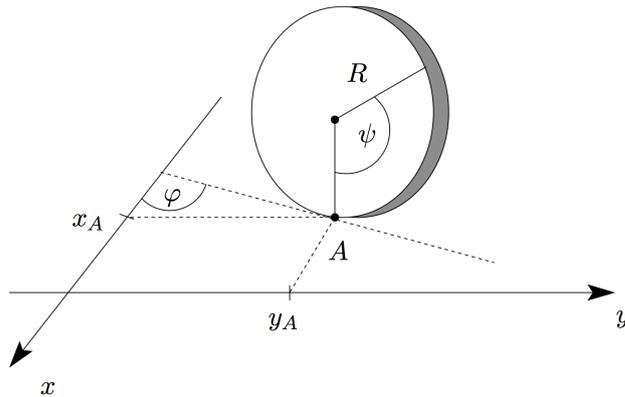


Abbildung 2.5: Eine Kreisscheibe rollt auf einer Ebene

Quelle: Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik I - Klassische Mechanik - Blatt 9 - Prof.Dr.Trebin - Uni Stuttgart

Eine rollende Kreisscheibe hat 6 Freiheitsgrade, wenn man die Zwangsbedingungen nicht beachtet, und ist ein starrer Körper. Eine Zwangsbedingung ist immer der auf dem Umfang der Kreisscheibe befindliche Auflagepunkt (x_A, y_A) , der Kontakt zur Ebene haben muss, auf dem sich die Kreisscheibe bewegt. Außerdem wird die Bewegung der Kreisscheibe durch ihre Rollrichtung, wobei der zugehörige Parameter in der Skizze φ ist (nämlich der Winkel zwischen der x -Achse und der Schnittlinie von Scheibenebene und der Rollebene) und dem Neigungswinkel der Scheibe, in der Skizze θ . Der Rollwinkel der Scheibe heißt in der Skizze ψ .

Rollbedingungen:

$$x_A - r\psi \cos(\alpha) = 0 \quad ; \quad y_A - r\psi \sin(\alpha) = 0 \quad (2.5)$$

Zwangsbedingungen:

$$dx_A = -rd\psi \cos(\varphi) \quad ; \quad dy_A = -rd\psi \sin(\varphi) \quad (2.6)$$

Die gegebenen differentiellen Bedingungen für die 5 Scheibenkoordinaten $(x_A, y_A, \varphi, \psi, \theta)$ sind nicht integrierbar, solange φ unbestimmt ist.

φ, ψ und θ sind die **euler'schen Winkel** - mehr dazu später in der Vorlesung.

Im Allgemeinen trifft man nicht-holonome Nebenbedingungen zwischen Differentia- len bzw. Geschwindigkeiten an.

Nicht-holonome Nebenbedingungen haben allgemein die Form

$$\sum_j a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_j a_{ij} \dot{q}_j + a_{it} = 0 \quad (2.7)$$

2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Im Vergleich mit holonomen Zwangsbedingungen, die sich im allgemeinen in differentieller Form so ausdrücken lassen

$$df_i = \sum_j a_{ij} dq_j + b_i dt = 0 \quad (2.8)$$

(Hinweis: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}$; $b_i = \frac{\partial f_i}{\partial t}$)

Das bedeutet: Nebenbedingungen sind dann (und **nur** dann) holonome Nebenbedingungen, wenn

$$\begin{aligned} \exists f_i \mid a_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} &= \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \quad \forall i, j, k \end{aligned}$$

Das heißt: Das Differential muss exakt sein, damit die Kreuzableitungen identisch sind.

Weitere Unterscheidung von Nebenbedingungen

- rheonom (fließend; zeitabhängig)
- skleronom (starr; zeitunabhängig)

2.3 Die newton'schen Bewegungsgleichungen mit Nebenbedingungen

Sei im Folgenden $m = \text{const.} \rightarrow \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$.

Man betrachte k holonome Nebenbedingungen. Für holonome Nebenbedingungen gilt dann Allgemein für die Bewegung, dass sie sich im $3N - k$ Dimensionalen Konfigurationsraum abspielt (an dieser Stelle sind Kenntnisse über Differentialgeometrie hilfreich). Bei nicht-holonomen Nebenbedingungen reduziert sich die Anzahl der Dimensionen des Konfigurationsraums nicht. Die Ortsvektoren \mathbf{r}_i sind abhängig von den generalisierten Koordinaten q_1, \dots, q_{3N-k} und gegebenenfalls von der Zeit t .

Das bedeutet

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}; t) \quad (2.9)$$

Dabei ist zu beachten, dass die generalisierten Koordinaten **nicht** notwendigerweise **unabhängig** voneinander sind. Erst die unter Berücksichtigung der holonomen Zwangsbedingungen übrig bleibenden Koordinaten sind unabhängig voneinander (dessen bedient sich später der Lagrangeformalismus).

Um die Zwangskräfte mit zu berücksichtigen, wird nun die newton'sche Bewegungsgleichung verallgemeinert:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{Z}_i \quad (2.10)$$

\mathbf{F}_i ist dabei die Summe aller inneren und äußeren Kräfte, so zum Beispiel die **Gravitation, Federkraft, oder elektromagnetische Kräfte**.

\mathbf{Z}_i ist die Summe aller Zwangskräfte. Zwangskräfte sind die Kräfte, die wirken müssen, um die geometrischen Einschränkungen des Systems aufrecht zu erhalten, so zum Beispiel **Druck durch Draht** oder **Fadenspannung**. Die Wirkung dieser Kräfte wird durch die geometrische Betrachtung klar (Zwangskräfte wirken **immer** senkrecht zu den betrachteten, sich bewegenden Teilchen, da sie sonst eine Beschleunigung in irgendeine Richtung zur Folge hätten, was dem Gedanken der Zwangskraft klar widerspricht). Ihre Größe ist allerdings **unklar**.

Die Verallgemeinerung der newton'schen Bewegungsgleichung kann nicht ohne weiteres gelöst werden.

2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

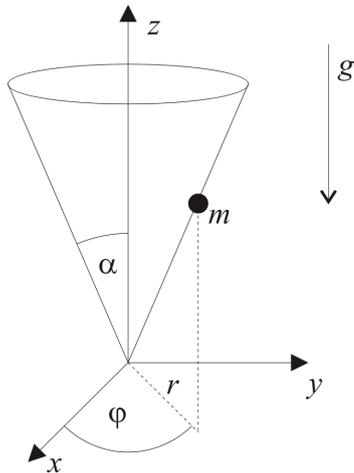


Abbildung 2.6: Eine Masse m bewegt sich reibungsfrei und unter Einfluss der Gravitationskraft in einem Kreiskegel

Quelle: Klassische Mechanik (Skript) - Prof.Dr.Günther Mahler; S.93

Die Bewegungsgleichungen für das Teilchen im Kreiskegel lauten:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Z_x \\ m\ddot{y} &= Z_y \\ m\ddot{z} &= Z_z - mg \end{aligned}$$

Durch die Rotationssymmetrie liegt die Wahl der Zylinderkoordinaten als verallgemeinerte Koordinaten nahe. Für die Zwangsbedingung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{r}{z} &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \tan(\alpha) \\ r &= \tan(\alpha) \cdot z \\ r - z \tan(\alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Offenbar sind nur 2 Koordinaten unabhängig, z.B. r und φ . Die Koordinatentransformation ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \cot(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Damit ergibt sich für die vorher aufgestellten Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x} = m\left(\ddot{r}\cos(\varphi) - 2r\dot{\varphi}\sin(\varphi) - r\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi)\right) = Z_x \quad (2.13)$$

$$m\ddot{y} = m\left(\ddot{r}\sin(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + r\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)\right) = Z_y \quad (2.14)$$

$$m\ddot{z} = m\left(\ddot{r}\cot(\alpha)\right) = Z_z - mg \quad (2.15)$$

Man beachte, dass r und φ zeitabhängig sind. Die vorhin angesprochene Bedingung ist, dass $\mathbf{Z}_i \perp$ Kegelwand gilt. Damit lässt sich folgende Beziehung formulieren:

$$\begin{aligned} \frac{Z_y}{Z_x} &= \tan(\varphi) \\ \frac{Z_y}{Z_x} &= \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\ Z_y \cos(\varphi) &= Z_x \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Damit lassen sich bestimmende Gleichungen für Z_z aufstellen (eine Skizze ist an dieser Stelle äußerst hilfreich):

$$\begin{aligned} \frac{-Z_z}{\sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}} &= \frac{-Z_z \cos(\varphi)}{\sqrt{Z_x^2 \cos^2(\varphi) + Z_y^2 \sin^2(\varphi)}} \\ &= \frac{-Z_z \cos(\varphi)}{\sqrt{Z_x^2 \cos^2 Z_x^2 \cos^2(\varphi)}} \\ &= \frac{-Z_z \cos(\varphi)}{Z_x} = \tan(\alpha) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$Z_z \cos(\varphi) = -Z_x \tan(\alpha) \quad (2.17)$$

Unter Berücksichtigung dessen lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad (2.18)$$

Damit ergibt sich schlussendlich folgender Term für die Bewegungsgleichung:

$$\left(\tan(\alpha) + \cot(\alpha)\right)\dot{r} - r\dot{\varphi}^2 \tan(\alpha) + g = 0 \quad (2.19)$$

2.3.1 Rollpendel

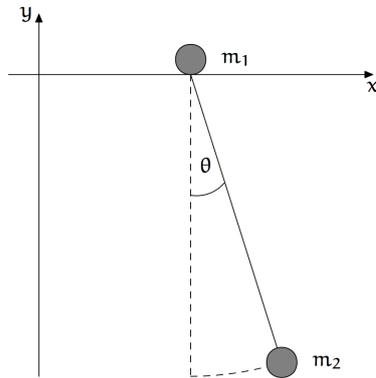


Abbildung 2.7: Skizze zum Rollpendel

Quelle: Klassische Mechanik (Skript) - Prof.Dr.B.Drossel; S.18

Beim Rollpendel sind 2 Massen durch eine masselose Stange miteinander verbunden, wobei die obere der beiden Massen (im Bild m_1) ihrerseits wieder reibungsfrei auf einer Schiene gelagert ist, auf der Sie sich in x -Richtung bewegen kann.

Für die Bewegungsgleichungen ergibt sich:

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x} \quad (2.20)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = Z_{1y} - m_1 g \quad (2.21)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = Z_{2x} \quad (2.22)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = Z_{2y} - m_2 g \quad (2.23)$$

Die Zwangsbedingung lautet $y_1 = 0$ (oder $y_1 = \text{const.}$, allerdings ist das umständlicher).

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \quad (2.24)$$

Wähle x und φ als unabhängige Koordinaten, es ergibt sich

$$x_2 = x_1 + l \sin(\varphi) \quad \longrightarrow \quad y_2 = -l \cos(\varphi) \quad (2.25)$$

Ergänzung zu 2.25:

$$\sin(\varphi) = \frac{x_2 - x_1}{l} \quad (2.26)$$

$$Z_{1x} = m_1 \ddot{x}_1$$

$$Z_{1y} = m_1 g$$

2 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

$$Z_{2x} = m_2 \left(\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - l\dot{\varphi} \sin(\varphi) \right)$$
$$Z_{2y} = m_2 \left(l\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + l\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \right)$$

Nach Newtons drittem Axiom gilt $Z_{1x} = -Z_{2x}$. Außerdem gilt aus geometrischer Betrachtung

$$\tan(\varphi) = \frac{-Z_{2x}}{Z_{2y}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (c) \cdot \cos(\varphi) + (d) \cdot \sin(\varphi) &= \ddot{x}_1 \cos(\varphi) + l\ddot{\varphi} + g \sin(\varphi) = 0 \\ \rightarrow (a) + (c) \rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 &= m_2 l (\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) - \ddot{\varphi} \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

Das generelle Vorgehen zum Aufstellen der Newtonschen Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen

1. Durch die k holonomen Nebenbedingungen wird der Freiheitsgrad des Systems auf $3N - k$ reduziert, $3N - k$ unabhängige Koordinaten wählen und Bewegungsgleichungen aufstellen
2. Alle Zwangskraftkomponenten durch geometrische Überlegungen eliminieren
3. Alle k Zwangskraftkomponenten durch Kombination der $3N$ Gleichungen eliminieren

Im Allgemeinen ist dieses Verfahren **sehr mühsam**. In den folgenden Kapiteln werden Formalismen eingeführt werden, mit denen es möglich ist, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, ohne die Zwangskräfte mitführen oder berechnen zu müssen.

Allgemein Bemerkung: Die Zwangskräfte stehen immer senkrecht zur Bewegung, da sie sonst eine Beschleunigung zur Folge haben.

3 Das d'Alembert Prinzip

Nach den Überlegungen des vorherigen Kapitels sind Aufgaben mit Zwangsbedingungen im Rahmen der Newton'schen Mechanik prinzipiell lösbar, in der Praxis ist das Lösen allerdings oft recht schwierig.

3.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Definition

Die virtuelle Verrückung ist eine infinitesimale Verrückung des i -ten Teilchens, die mit den Nebenbedingungen verträglich ist und instantan erfolgt - das ist dabei der große Unterschied zu reellen Verrückungen des i -ten Teilchens, da diese bei bewegten Teilchen auch Komponenten entlang der Bewegungsrichtung haben, die aus dem Zeitraum der Verrückung folgen. Besonders anschaulich ist das im nachfolgenden Beispiel.

Bei skleronomen Nebenbedingungen sind die virtuellen und die reellen Verrückungen identisch, da dort die Forderung an die virtuellen Verrückungen $\frac{\partial \delta \vec{r}}{\partial t} = 0$ trivialerweise erfüllt ist und die Zeitabhängigkeit der reellen Verrückungen keinen Einfluss auf die möglichen Teilchenbahnen bei Verrückung haben.

3.1.1 Perle auf beschleunigtem Draht

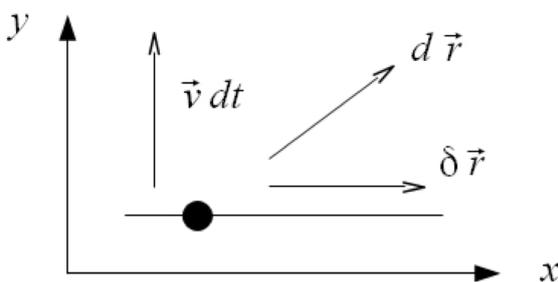


Abbildung 3.1: Darstellungen zu den virtuellen und reellen Verrückungen einer Perle auf einem beschleunigten Draht

Quelle: Klassische Mechanik (Skript) - Prof.Dr.B.Drossel; S.20

Solange der Draht sich nicht bewegt, ist die Zwangsbedingung an die Perle auf dem Draht skleronom, bewegt sich der Draht jedoch irgendwie, zum Beispiel gleichförmig

3 Das d'Alembert Prinzip

beschleunigt, wird die Zwangsbedingung rheonom und damit entsprechen die reellen Verrückungen der Perle nicht länger den virtuellen.

Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung gilt

$$y - \frac{1}{2}at^2 = 0 \quad , \quad \delta \mathbf{r} \parallel x - \text{Achse} \quad (3.1)$$

$d\mathbf{r}$ hat auch eine y -Komponente, die Ursache dafür liegt in der Zeitabhängigkeit der reellen Verrückung. Damit gilt $d\mathbf{r} \neq \delta \mathbf{r}$.

Die virtuellen Verrückungen eines Teilchens ergeben sich durch Ableiten der Trajektorie $\mathbf{r}_i(t)$ des i -ten beweglichen Teilchens im System nach den unabhängigen Koordinaten des Problems, es gilt also

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.2)$$

Nun stellen wir die Bewegungsgleichung ganz allgemein mit Zwangskräften auf:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i &= \mathbf{Z}_i \\ \rightarrow \sum_{i=1}^n (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

Postulat Die Natur der Zwangskräfte ist derart, dass sie keine virtuelle Zwangsarbeit verrichten, d.h.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}_i \quad (3.3)$$

Die obige Gleichung heißt das **Prinzip von d'Alembert**. Das d'Alembert'sche Prinzip ist eine plausible Annahme, jedoch lässt sie sich nicht aus den Newton'schen Axiomen ableiten.

Bemerkung Das d'Alembert'sche Prinzip ist die Begründung für die Unmöglichkeit eines klassisch mechanischen Perpetuum Mobiles.

Beispiel zur virtuellen Arbeit

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \nabla V + \mathbf{Z} \quad (3.4)$$

3 Das d'Alembert Prinzip

Eine Energiebilanz legt nahe, dass

$$E_2 - E_1 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{Z} dr = 0 \quad (3.5)$$

gilt. Die tatsächlich verrichtete Arbeit ist gegeben mit

$$W_{\text{real}} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(r_2) - V(r_1) = V_2 - V_1 \quad (3.6)$$

Bemerkungen zu Nebenbedingungen Bei rheonomen Zwangsbedingungen ist nur die virtuelle Arbeit $W_{\text{virt}} = 0$, nicht die reale Arbeit der Zwangskräfte. Beim Beispiel der Perle auf dem gleichförmig beschleunigten Draht greift die Zwangskraft \mathbf{Z} normal auf dem Draht (\parallel y-Richtung) an und bindet die Perle an den Draht, zwar ist $\mathbf{Z} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$, aber es gilt $\mathbf{Z} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$.

Die einzelnen Summanden in der d'Alembert'schen Gleichung gilt nicht notwendigerweise $\mathbf{Z}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$, allerdings gilt immer für die Summe, dass $\sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$.

3.1.2 Das Rollpendel

Von diesem neuen Standpunkt aus betrachte man das Rollpendel noch einmal.

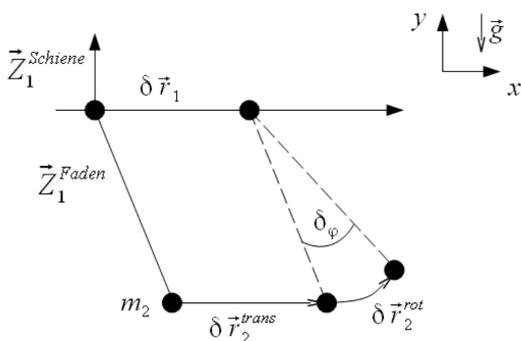


Abbildung 3.2: Darstellung der virtuellen Verrückungen bei Rollpendel

Quelle Klassische Mechanik (Skript) - Prof.Dr.B.Drossel; S.21

Über die virtuellen Verrückungen lässt sich sagen

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 &= (\mathbf{Z}_{\text{Schiene}} + \mathbf{Z}_{\text{Faden}}) \cdot \delta\mathbf{r}_1 \\ &= \mathbf{Z}_{\text{Faden}} \cdot \delta\mathbf{r}_1 \neq 0 \\ \mathbf{Z}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 &= -\mathbf{Z}_{\text{Faden}} \cdot (\delta\mathbf{r}_{2\text{trans}} + \delta\mathbf{r}_{2\text{rot}}) \\ &= -\mathbf{Z}_{\text{Faden}} \cdot \delta\mathbf{r}_{2\text{trans}} \neq 0 \end{aligned}$$

3 Das d'Alembert Prinzip

Wie wir aus der d'Alembert'schen Gleichung wissen, gilt $\sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$. Das muss natürlich auch in diesem Fall gelten, obwohl die einzelnen Summanden klar von 0 verschieden sind.

Die d'Alembertsche Gleichung sagt auch aus, dass durch die Zwangskräfte keine neuen Bewegungen entstehen, die Zwangskräfte sind ja geometrisch bedingt, schränken die Bewegungsfreiheit ein und wirken nur so, dass die Bewegung in der eingeschränkten Form erhalten bleibt.

3.1.3 Das Teilchen im Kreiskegel

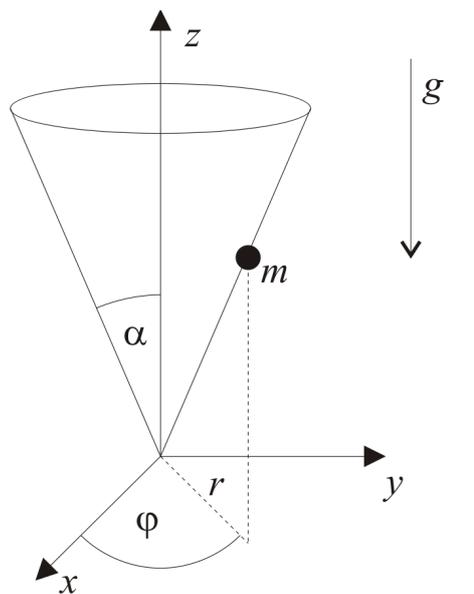


Abbildung 3.3: Ein Teilchen der Masse m bewegt sich reibungsfrei unter Einfluss der Gravitationskraft im Kreiskegel

Quelle: Klassische Mechanik (Skript) - Prof.Dr.Günther Mahler; S.93

Der Kreiskegel ist offensichtlich rotationssymmetrisch um eine Achse, als dem Problem angepasste Koordinaten bieten sich also nun Zylinderkoordinaten an, die auch rotationssymmetrisch um eine Achse sind. Die Transformation von kartesischen auf Zylinderkoordinaten ist gegeben mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Dabei ist r in diesem Fall der Radius des Kreiskegels an einer bestimmten Höhe. Für die Höhe des Teilchens im Kreiskegel lässt sich aus geometrischer Überlegung ablesen

$$z = r \cot(\alpha) \quad (3.8)$$

3 Das d'Alembert Prinzip

wobei α der Öffnungswinkel des Kreiskegels gemessen von der z-Achse aus ist. Durch Einsetzen der Zwangsbedingung für z in die angepassten Koordinaten folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \cot(\alpha) \end{pmatrix} =: \mathbf{r} \quad (3.9)$$

Durch Ableiten der generalisierten nach den unabhängigen Koordinaten des Problems (in diesem Fall offensichtlich r, φ) ergeben sich die virtuellen Verrückungen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \rightarrow \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial(r \cos(\varphi))}{\partial q_j} \delta q_j \\ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial(r \sin(\varphi))}{\partial q_j} \delta q_j \\ \sum_{j=1}^2 \frac{\partial(r \cot(\alpha))}{\partial q_j} \delta q_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(r \cos(\varphi))}{\partial r} \delta r + \frac{\partial(r \cos(\varphi))}{\partial \varphi} \delta \varphi \\ \frac{\partial(r \sin(\varphi))}{\partial r} \delta r + \frac{\partial(r \sin(\varphi))}{\partial \varphi} \delta \varphi \\ \frac{\partial(r \cot(\alpha))}{\partial r} \delta r + \frac{\partial(r \cot(\alpha))}{\partial \varphi} \delta \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \delta r - r \sin(\varphi) \delta \varphi \\ \sin(\varphi) \delta r + r \cos(\varphi) \delta \varphi \\ \cot(\alpha) \delta r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die \mathbf{F} sind die inneren und äußeren Kräfte, die im System wirken. In diesem Fall wirkt ausschließlich die Gravitationskraft. Diese hat die Form

$$\mathbf{F}_G = m \cdot \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Die d'Alembertgleichung des Systems muss also nun lauten

$$\sum_{i=1}^3 \left(m \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i \right) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.11)$$

Die Bewegungsgleichungen des Systems werden nun durch Auswertung der d'Alembertgleichung gewonnen.

3 Das d'Alembert Prinzip

Für den Ansatz zur Bewegungsgleichung gilt also jetzt in vektorieller Form (Verträglich mit der Summenschreibweise, weil das Skalarprodukt analog definiert ist)

$$m \cdot \left\{ \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{g} \right\} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (3.12)$$

Für $\ddot{\mathbf{r}}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} (r \cos(\varphi)) \\ \frac{d^2}{dt^2} (r \sin(\varphi)) \\ \frac{d^2}{dt^2} (r \cot(\alpha)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \dot{\varphi}) \\ \frac{d}{dt} (\dot{r} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \dot{\varphi}) \\ \frac{d}{dt} (\dot{r} \cot(\alpha)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos(\varphi) - 2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - r \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - r \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \\ \ddot{r} \sin(\varphi) + 2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} - r \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \\ \ddot{r} \cot(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit eingesetzten Vektoren hat die d'Alembertgleichung die Form

$$\begin{aligned} m \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \ddot{r} \cos(\varphi) - 2\dot{r} \sin(\varphi) \dot{\varphi} - r \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 - r \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \\ \ddot{r} \sin(\varphi) + 2\dot{r} \cos(\varphi) \dot{\varphi} - r \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \\ \ddot{r} \cot(\alpha) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \right\} \\ \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \delta r - r \sin(\varphi) \delta \varphi \\ \sin(\varphi) \delta r + r \cos(\varphi) \delta \varphi \\ \cot(\alpha) \delta r \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Bewegungsgleichungen des Teilchens im Kreiskegel

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\delta r \cdot \left\{ \ddot{r} \cos^2(\varphi) - 2\dot{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} - r \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \delta \varphi \left\{ -r \dot{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 2r \dot{r} \sin^2(\varphi) \dot{\varphi} + r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 \sin^2(\varphi) \ddot{\varphi} \right\} \right) \\ &\quad + \left(\delta r \left\{ \ddot{r} \sin^2(\varphi) + 2\dot{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} - r \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r \sin(\varphi) \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \delta \varphi \left\{ r \dot{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 2r \dot{r} \cos^2(\varphi) \dot{\varphi} - r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2(\varphi) \ddot{\varphi} \right\} \right) \\ &\quad + \left(\delta r \left\{ \ddot{r} \cot^2(\alpha) + g \cot(\alpha) \right\} \right) \end{aligned}$$

3 Das d'Alembert Prinzip

$$0 = \delta r \left\{ \ddot{r} \left(1 + \cot^2(\alpha) \right) + g \cot(\alpha) - r\dot{\varphi}^2 \right\} + \delta \varphi \left\{ 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} \right\}$$

Die Bewegungsgleichungen für das Teilchen im Kreiskegel nach Newton lauten

$$0 = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

$$0 = \ddot{r} \left(\tan(\alpha) + \cot(\alpha) \right) - r\dot{\varphi}^2 \tan(\alpha) + g$$

Man kann nun die aus dem d'Alembertprinzip gewonnenen Bewegungsgleichungen einfach auf die selbe Form bringen

$$\cot(\alpha)\delta r \left\{ \ddot{r} \left(\tan(\alpha) + \cot(\alpha) \right) - r\dot{\varphi}^2 \tan(\alpha) + g \right\} + r\delta \varphi \left\{ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \right\} = 0$$

Wegen der Unabhängigkeit von δr und $\delta \varphi$ verschwinden beide Klammern eigenständig und es folgen die aus den Newton'schen Überlegungen bekannten Bewegungsgleichungen

$$0 = \ddot{r} \left(\tan(\alpha) + \cot(\alpha) \right) - r\dot{\varphi}^2 \tan(\alpha) + g \quad (3.13)$$

$$0 = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \quad (3.14)$$

3.1.4 Das Rollpendel

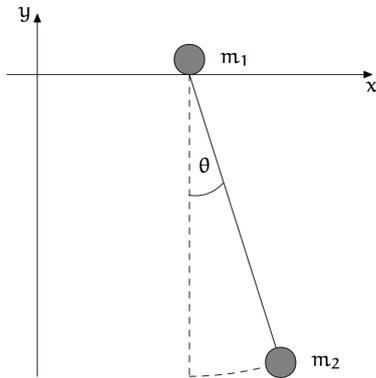


Abbildung 3.4: Man betrachte eine Masse m_2 , die in einem beweglichen Punkt x_0 der Masse m_1 fest mit einer Stange der Länge l aufgehängt sei. Beim Schwingen schlieÙe die Stange mit dem Lot vom Aufhängepunkt zum Boden mit der Stange den Winkel θ ein.

Für die Ortsvektoren der beiden Massen folgt

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} l \sin(\theta) + x_1 \\ -l \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Es ist hierbei besonders wichtig, auf die Parametrisierung der zweiten Masse zu achten! Bei Parametrisierung der Bewegung von m_2 den ebenen Polarkoordinaten entsprechend würde das Pendel über der Schiene, auf der m_1 liegt, schwingen. Es gilt offensichtlich, dass

$$l = \text{const.} \quad (3.16)$$

Für die virtuellen Verrückungen der beiden Massen folgt nach bekannter Formel sofort

$$\delta \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta x_1, \quad \delta \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \delta x_1 + l \cos(\theta) \delta \theta \\ l \sin(\theta) \delta \theta \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Damit lautet die d'Alembertgleichungen des Rollpendels

$$m_1 \ddot{r}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + m_2 \left\{ \ddot{r}_2 - \mathbf{g} \right\} \delta \mathbf{r}_2 = 0 \quad (3.18)$$

3 Das d'Alembert Prinzip

Das liefert

$$\begin{aligned}
 0 &= m_1 \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2 \left\{ \begin{pmatrix} l(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta)\dot{\theta}^2) \\ l\sin(\theta)\ddot{\theta} + l\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + g \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 + l\cos(\theta)\delta\theta \\ l\sin(\theta)\delta\theta \end{pmatrix} \\
 &= m_1\ddot{x}_1\delta x_1 + m_2\delta x_1 \left\{ l\cos(\theta)\ddot{\theta} - l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + \ddot{x}_1 \right\} + m_2\delta\theta \left\{ l^2\cos^2(\theta)\ddot{\theta} - l^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \ddot{x}_1 l\cos(\theta) + l^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2(\theta)\ddot{\theta} + gl\sin(\theta) \right\} \\
 &= \delta x_1 \left\{ m_1\ddot{x}_1 + m_2 \left(l\cos(\theta)\ddot{\theta} - l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + \ddot{x}_1 \right) \right\} + m_2\delta\theta \left\{ l^2\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 l\cos(\theta) + gl\sin(\theta) \right\}
 \end{aligned}$$

Durch die Unabhängigkeit von δx_1 und $\delta\theta$ folgen die beiden Bewegungsgleichungen für das Rollpendel

$$\begin{aligned}
 0 &= m_1\ddot{x}_1 + m_2 \left(l\cos(\theta)\ddot{\theta} - l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + \ddot{x}_1 \right) \\
 0 &= l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos(\theta) + g \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

3.2 Das Gleichgewichtsprinzip

Die d'Alembertgleichung führt auf das Gleichgewichtsprinzip der Mechanik - Ein mechanisches System ist im Gleichgewicht, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^N \delta \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0 \tag{3.19}$$

4 Lagrangegleichung 2. Art

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Lagrangegleichungen wählen wir die d'Alembertgleichung

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.1)$$

Dabei werden die Ortsvektoren \mathbf{r}_i als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten q_1, \dots, q_j verstanden, wobei die verallgemeinerten Koordinaten **nicht notwendigerweise unabhängig** voneinander sind. Daraus folgt dann für die virtuellen Verückungen:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (4.2)$$

Mithilfe dessen lassen sich **verallgemeinerte Kräfte** einführen. Für diese gilt:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (4.3)$$

$$= \sum_{i=1}^N Q_j \cdot \delta q_j \quad (4.4)$$

Wobei

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (4.5)$$

eben diesen generalisierten Kräften entspricht.

4 Lagrangegleichung 2. Art

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (4.6)$$

mit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (4.7)$$

als gesamtkinetische Energie - also die Summe aller kinetischer Teilenergien.

Es folgen einige Hilfsmittel:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (4.9)$$

Außerdem gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \quad (4.10)$$

Das wollen wir im Folgenden beweisen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial q_j \cdot \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

□

4 Lagrangegleichung 2. Art

Es folgt der Beweis, dass sich die Lagrangegleichung aus dem d'Alembertprinzip herleiten lässt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right)
 \end{aligned}$$

□

Die Gleichungen 4.5 und 4.6 führen auf die folgende Beziehung

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \tag{4.11}$$

Die Gleichung 4.11 heißt **Lagrangegleichung 2.Art** und gilt für **holonome** Nebenbedingungen.

Im Folgenden machen wir die Annahme, dass k holonome Zwangsbedingungen auf $n = 3N - k$ **unabhängige** Koordinaten führen, was allgemein für holonome Nebenbedingungen gelten soll.

$$\delta q_j \quad \text{mit } j = 1, \dots, n \text{ unabhängig} \tag{4.12}$$

Daraus lässt sich folgende Gleichung formulieren:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \tag{4.13}$$

Diese Beziehung gilt für beliebige Kräfte \mathbf{F} und holonome Zwangsbedingungen.

4 Lagrangegleichung 2. Art

Wir machen die Annahme \exists Potential $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t)$:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = \nabla_{\mathbf{r}_i} V \quad (4.14)$$

wobei $i = 1, \dots, N$.

Daraus folgt die Lagrangefunktion 2. Art für holonome Zwangsbedingungen und rheonome Kräfte:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (4.15)$$

$$= \frac{\partial V(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j} \quad (4.16)$$

Daraus lässt sich der folgende wichtige Zusammenhang herleiten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (4.17)$$

wobei \mathcal{L} die Lagrangefunktion ist mit

$$\mathcal{L} = T - V \quad (4.18)$$

Dass sich aus der Lagrangefunktion 2. Art auch das d'Alembertsche Prinzip herleiten lässt, wollen wir im Folgenden beweisen:

$$\mathcal{L}G2 \rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j$$

$$0 = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \cdot \delta q_j}_{\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\mathbf{F}_i}$

$$0 = \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

□

4.1 Geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Gegeben sei $V(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t)$.

Die generalisierten Kräfte sind gegeben mit

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \quad (4.19)$$

Ein bekanntes Beispiel für ein geschwindigkeitsabhängiges Potential findet man in der Elektrodynamik:

$$V = e(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (4.20)$$

wobei Φ das elektrische Potential ist und \mathbf{A} das Vektorpotential nach der Zeit.

Das elektrische Feld \mathbf{E} ist charakterisiert mit:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.21)$$

Außerdem gilt für das Magnetische Feld \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.22)$$

Die Lorentzkraft ergibt sich daraus folgendermaßen:

$$\mathbf{F}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial v_x} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.23)$$

y und z Komponente lassen sich analog dazu herleiten.

4.2 Newton'sche Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrangegleichung

Die newton'sche Bewegungsgleichung lässt sich genauso aus der Lagrangegleichung gewinnen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - V \\ &\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \\ &= \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= m\ddot{x} - \mathbf{F}_x \\ \rightarrow \mathbf{F}_x &= m\ddot{x}\end{aligned}$$

Da F ein konservatives Kraftfeld sein soll, gilt $\mathbf{F} = -\nabla V$. Man sieht, dass die Ableitung des Potentials also bis auf Vorzeichen der Kraft entsprechen muss.

4.3 Gebrauchsanweisung zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen

- Schreibe $T - V$ in Abhängigkeit der $3N - k$ generalisierten Koordinaten und ihren Geschwindigkeiten - ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingungen
- Drücke die $3N$ Koordinaten durch $3N - k$ unabhängige Koordinaten aus, wobei k für die Anzahl der holonomen Nebenbedingungen steht
- Bestimme die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = T - V$ als Funktion der $3N - k$ unabhängigen Koordinaten, der Geschwindigkeiten und eventuell der Zeit
- Stelle die Lagrangegleichung 2. Art auf

4.3.1 Teilchen im Kreiskegel

Für die generalisierten Koordinaten ergibt sich: $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, z)$.

Der Kreiskegel ist offensichtlich rotationssymmetrisch um eine Achse, als dem Problem angepasste Koordinaten bieten sich also nun Zylinderkoordinaten an, die auch rotationssymmetrisch um eine Achse sind. Die Transformation von kartesischen auf Zylinderkoordinaten ist gegeben mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Dabei ist r in diesem Fall der Radius des Kreiskegels an einer bestimmten Höhe. Für die Höhe im Kreiskegel lässt sich ausmachen

$$z = r \cot(\alpha) \quad (4.25)$$

Für die kinetische Energie des Teilchens folgt damit sofort

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \cot^2(\alpha) \right\} \quad (4.26)$$

Für die potentielle Energie des Teilchens folgt sofort

$$V = mgr \cot(\alpha) \quad (4.27)$$

Die Lagrangefunktion lautet nun

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \cot^2(\alpha) \right\} - mgr \cot(\alpha) \quad (4.28)$$

Für die Bewegungsgleichungen ergibt sich damit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \\ &= \frac{d}{dt} \left(m \dot{r} \left\{ 1 + \cot^2(\alpha) \right\} \right) - \left(m r \dot{\varphi}^2 - mg \cot(\alpha) \right) \\ &= m \ddot{r} \left(1 + \cot^2(\alpha) \right) + mg \cot(\alpha) - m r \dot{\varphi}^2 \\ &= \ddot{r} \left(\tan(\alpha) + \cot(\alpha) \right) + g - \tan(\alpha) r \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

4 Lagrangegleichung 2. Art

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \\ &= \frac{d}{dt} \left(mr^2 \dot{\varphi} \right) \\ &= mr^2 \ddot{\varphi} + 2mr\dot{\varphi} \\ &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Der Vergleich mit den Bewegungsgleichungen, die man mithilfe des d'Alembertschen Prinzips ermitteln konnte (siehe 3.14), macht die Überlegenheit des Lagrangeformalismus gegenüber dem d'Alembertschen Prinzip beim Aufstellen von Bewegungsgleichungen klar.

Bemerkung zur Forminvarianz von Lagrange und Newton

Die Lagrangegleichung 2. Art ist forminvariant unter Koordinatentransformationen, die Newton'sche Bewegungsgleichung im Allgemeinen nicht!

Beweis:

$$q_i \rightarrow Q_i(q_i, t); \quad \mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t))$$

Damit ergibt sich

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}} \quad (4.29)$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

5.1 Impulse

5.1.1 Der kanonische- und der kinematische Impuls

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.1)$$

nennt man kanonischen oder konjugierten Impuls. Auch generalisierter Impuls ist ein gebräuchliches Synonym.

Freies Teilchen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{m\mathbf{r}^2}{2} &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ \rightarrow p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ &P_y, P_z \text{ analog} \\ \rightarrow \mathbf{p} &= m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v} \text{ (kinematischer Impuls)} \end{aligned}$$

Ebenes Pendel

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi) \\ \rightarrow P_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Erinnerung: Der Drehimpuls ist gegeben mit $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ In diesem Beispiel entspricht $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ einfach $l \cdot l\dot{\varphi}$.

Allgemein für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale ist der konjugierte Impuls gleich dem kinematischen Impuls.

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Dagegen gilt zum Beispiel beim elektromagnetischen Potential $V = e(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ für den Impuls

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \quad \left(\mathcal{L} = T - V = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - e(\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right) \quad (5.2)$$

Man sieht: es handelt sich um den kanonischen Impuls. Der kinematische Impuls ist gegeben mit

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} \quad (5.3)$$

Der kinematische Impuls ist unter anderem wichtig für die Quantenmechanik! Die Koordinaten q_j , die nicht in der Lagrangefunktion auftreten (sondern nur \dot{q}_j) heißen zyklisch.

$$q_j \text{ zyklisch} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sigma \quad (5.4)$$

Das führt auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0 \quad (5.5)$$

Die kanonischen Impulse von zyklischen Koordinaten sind **Erhaltungsgrößen**.

Wenn das Problem translationsinvariant ist, folgt daraus die Impulserhaltung. Aus der Rotation folgt die Drehimpulserhaltung.

Allgemein: Symmetrien von Problemen schaffen Erhaltungsgrößen!

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t) \quad \text{Erhaltungsgröße} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t) = 0$$

oder konstante Bewegung oder Bewegungsintegral

Behauptung Ein System mit n Freiheitsgraden hat $2n$ unabhängige Erhaltungsgrößen.

Beweis Die n Lösungen q_i der Lagrangegleichung (Lagrangegleichung 2.Art) enthalten $2n$ freie Konstanten c_1, c_2, \dots, c_{2n} , die durch die Anfangsbedingungen $q_1(t_0), \dot{q}_1(t_0), \dots, \dot{q}_n(t_0)$ eindeutig bestimmt werden. Auflösen nach $c_K = c_K(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$.

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Beispiel Der ungedämpfte harmonische Oszillator

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t) &= -c_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \text{Anfangsbedingungen} &= c_1 = x(0) \quad , \quad \dot{x}(0)\end{aligned}$$

Das Auflösen nach den Konstanten liefert

$$\begin{aligned}c_1 &= x(t) \cos(\omega_0 t) - \dot{x}(t) \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \\ c_2 &= x(t) \sin(\omega_0 t) + \dot{x}(t) \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0}\end{aligned}$$

Das ist allerdings meist nutzlos, da die Gleichheiten oft erst nach Lösung der Differentialgleichung auflösbar sind.

Einmal mehr sieht man, dass die Wahl des Koordinatensystems wichtig ist: Anhand der geschickt gewählten Koordinaten lassen sich viele Erhaltungsgrößen sofort ablesen bzw. sind diese einsichtlich, denn

1. Erhaltungsgrößen sind auch ohne Lösung der Bewegungsgleichung nützlich
Beispiel: Drehimpulserhaltung in Zentralkraftfeldern \rightarrow 2. Keplersche Gesetz (Fahrstuhl des Planeten überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen, was aus Problemsymmetrie / Drehimpulserhaltung folgt)
2. Bei genügend vielen Erhaltungsgrößen kann das System nicht chaotisch sein (wobei chaotisch eine präzise mathematische Bedeutung hat)
3. Jede Erhaltungsgröße verringert die Zahl der notwendigen Integrationen zur Lösung der Bewegungsgleichung um 1

Bei numerischen Integrationen der Bewegungsgleichung werden Erhaltungsgrößen meist zur Kontrolle der Rechengenauigkeit eingesetzt.

Das Teilchen im Keiskegel

Die Lagrangefunktion des Teilchens im Kreiskegel lautet

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} [(1 + \cot^2(\alpha)) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] - mgr \cot(\alpha) \quad (5.6)$$

Man sieht, dass φ eine zyklische Koordinate ist. dadurch folgt

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}^2 (\text{Drehimpuls}) = \text{const.} \quad (5.7)$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Die zweite Erhaltungsgröße ist die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}v^2 + mgz = \frac{m}{2} \left[(\tan(\alpha) + \cot(\alpha))\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2 \tan \alpha}{m^2 r^2} \right] \cot(\alpha) + mgr \cot(\alpha) = \text{const.} \quad (5.8)$$

Die Erhaltungsgrößen sind 2 Differentialgleichungen erster Ordnung für $\varphi(t)$ und $r(t)$

$$(2) \frac{dr}{dt} = \left[\frac{1}{1 + \cot^2(\alpha)} \left(\frac{2}{m} - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - mgr \cot(\alpha) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

Integrationsstipp

$$\frac{dr}{dt} = f(r) \rightarrow \frac{dr}{f(r)} = dt \rightarrow \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{f(r)} = \int_{t_0}^t dt = t \quad (5.10)$$

Damit folgt für t

$$t = \frac{1}{\sin(\alpha)} \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr'}{\frac{2}{m} \sqrt{E - \frac{p_\varphi^2}{2mr'^2} - mgr \cot(\alpha)}} \quad (5.11)$$

$$(1) \rightarrow \varphi(t) = \frac{p_\varphi}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)}$$

Das Rollpendel

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \left(x_1^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_1 \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos(\varphi) \right) \quad (5.12)$$

x_1 ist folglich zyklische Koordinate

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos(\varphi) = \text{const.} \quad (5.13)$$

Für geeignete Anfangsbedingungen ist $p_x = 0$

Daraus folgt

$$(m_1 + m_2)x_1 + m_2 l \sin(\varphi) = \text{const} \quad (5.14)$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Wähle den Koordinatenursprung so, dass $\text{const} = 0$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + l \sin(\varphi) \\ -l \cos(\varphi) \end{pmatrix} = l \cdot \begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Energieerhaltung

$$E = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2(\varphi) \right) - m_2 g l \cos(\varphi) \quad (5.16)$$

Daraus folgt für t

$$t = \sqrt{\frac{m_2}{2}} l \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2} \cos^2(\varphi) \right)}{E + m_2 g l \cos(\varphi)}} \quad (5.17)$$

5.2 Das Noether Theorem

Wir haben gesehen, dass \mathcal{L} invariant unter $q_i \rightarrow q'_i = q_i + \alpha$, woraus gefolgt ist, dass q_i zyklisch ist und p_i eine Erhaltungsgröße ist.

Verallgemeinerung: Koordinatentransformation $q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t, \alpha)$ mit $i = 1, \dots, 3N - k$.

Invertierbar $q'_i = q_i(q'_1, \dots, q'_{3N-k}, t, \alpha)$, wobei wieder $i = 1, \dots, 3N - k$.

Bsp. Translation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' + \alpha \cdot \mathbf{a}$ (gegeben durch Rotation um z-Achse)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}\left(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \frac{d}{dt}\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), t\right) =: \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', \alpha, t)$$

Betrachte Abhängigkeit von \mathcal{L}' von α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \left(\frac{d}{dt} q_i(\mathbf{q}', t, \alpha) \right)}{\partial \alpha} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \end{aligned}$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]$$

bzw. an der Stelle $\alpha = 0$:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{\partial \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (5.19)$$

Man betrachte folgende Koordinatentransformation

$$\mathbf{q}_i = q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t; \alpha) \quad (*) \quad (5.20)$$

Die Koordinatentransformation sei eine bijektive, die stetig differenzierbar in α sei und $\alpha = 0$ liefere die Identität ($q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t, \alpha) = q_i$)

Daraus folgt

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)$$

Wir hatten (5.19) gezeigt. Wenn die Koordinatentransformation (*) in \mathcal{L} invariant lässt, d.h.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) \text{ äquivalent } \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (5.21)$$

Es folgt also

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (5.22)$$

Daraus folgt

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', \alpha, t)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

Ist als Erhaltungsgröße

Freies Teilchen in 3d

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Rechnung nachtragen

Teilchen im rotationssymmetrischen Potential

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z) \quad (5.24)$$

Symmetrierotation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos(\alpha) + y' \sin(\alpha) \\ -x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}'(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \alpha) = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - V(x'^2 + y'^2) \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(\mathbf{r}', \alpha)}{\partial \alpha} &= -x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha) = y \\ \frac{\partial y(\mathbf{r}', \alpha)}{\partial \alpha} &= -x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha) = -x \end{aligned}$$

$$l'(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} (-x) = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})_z = -L_z \quad (5.26)$$

Das heißt L_z (also die z-Komponente des Drehimpulses) ist die gesuchte Erhaltungsgröße. In Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r^2, z) \\ &\rightarrow \varphi \text{ ist zyklisch, } \mathcal{L} \text{ unter } \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \alpha \text{ invariant} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial \varphi' - \alpha}{\partial \alpha} &= -mr^2\dot{\varphi} = -L_z \end{aligned}$$

Angenommen \mathcal{L}' bleibt unter der Variablentransformation $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}'(\mathbf{q}, \alpha)$ nicht un-
geändert, sondern

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}', t, \alpha) \quad (5.27)$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Das bedeutet also

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial F(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{3N-k} \left. \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \right) \\
 y &:= \sum_{i=1}^{3N-k} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}', \alpha, t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

ist also die gesuchte Erhaltungsgröße.

Freier Fall im homogenen Schwerfeld Betrachte die reine Galileitransformation

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - mgx \quad (5.29)$$

$$x \rightarrow x' = x + \alpha t$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x', \dot{x}', t, \alpha) &= \frac{m}{2} (\dot{x}' - \alpha)^2 - mg(x' - \alpha t) \\
 &= \mathcal{L}(x', \dot{x}') + \frac{d}{dt} F(x', t, \alpha)
 \end{aligned}$$

Damit folgt für die Erhaltungsgröße

$$\Phi = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(x', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = m \left(x - \dot{x}t - \frac{g}{2} t^2 \right)$$

Eichinvarianz der Lagrangefunktion

Betrachte $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ und $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t)$. Die beiden Lagrangefunktionen haben dieselben Bewegungsgleichungen, denn

$$\begin{aligned}
 \dot{F} &= \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}^2} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q}$$

\dot{F} erfüllt die Lagrangegleichung automatisch, \mathcal{L} und $\tilde{\mathcal{L}}$ haben also dieselben Bewegungsgleichungen.

5.2.1 Energieerhaltungssatz

Man betrachte ein abgeschlossenes System, das homogen in der Zeit sei. Daraus folgt, dass die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt. Das bedeutet \mathcal{L} ist invariant unter Zeitverschiebung $t \rightarrow t' = t + \alpha$.

Beachte Rheonome Zwangsbedingungen (vgl. Perle auf rotierendem Draht) haben eine explizite Zeitabhängigkeit, d.h. sie verrichten Arbeit. Daraus folgt, dass die Energie nicht erhalten ist und das System **Perle** ist **nicht** abgeschlossen.

Wir befassen uns nun also mit skleronomen Zwangsbedingungen (da diese keine explizite Zeitabhängigkeit haben).

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t + \alpha) \quad (5.30)$$

gelte und \mathcal{L} sei also invariant unter Zeittranslation.

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L} &= \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \\ &\rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$H := \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) = \text{const.} \quad (5.31)$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Teilchen im Potential

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) \quad (5.32)$$

H ist also

$$H = m(\dot{y}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V \quad (5.33)$$

$$H = T + V = E_{\text{Ges}} \quad (5.34)$$

Für konservative Kräfte gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.35)$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \quad (5.36)$$

Zu 5.36: Die kinetische Energie ist gegeben mit

$$T = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (5.37)$$

in generalisierten Koordinaten mit k holonomen Zwangsbedingungen gilt also

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (5.38)$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (5.39)$$

Außerdem lässt sich für T folgern

$$T = \sum_{k,l=1}^{3N-k} a_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad , \text{ wobei } a_{kl} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \quad (5.40)$$

5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^{3N-k} a_{kj} \dot{q}_k + \sum_{l=1}^{3N-k} a_{jl} \dot{q}_l \\ &\rightarrow \sum_{j=1}^{3N-K} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \mathbf{2T}\end{aligned}\tag{5.41}$$

□

$$\rightarrow H = 2T - \mathcal{L} = T + V = E_{\text{Ges}}\tag{5.42}$$

wobei H die **Hamiltonfunktion** ist. Als Erinnerung sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich holonome Nebenbedingungen als Exakte und aholonome Nebenbedingungen nur als inexakte Differentiale darstellen lassen, die Gradienten der F_i müssen senkrecht auf den F_i stehen, was in der Natur der Ableitung liegt.

6 Die Lagrangegleichungen 1. Art

Die Lagrangegleichungen 1. Art verwenden Lagrangemultiplikatoren, um die Zwangsbedingungen ausdrücken zu können. Die Lagrangemultiplikatoren treten in der Analysis bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen auf. Die Lagrangegleichungen 1. Art gelten vor allem auf für nicht-holonome, bzw. differentielle Nebenbedingungen. Die Zwangskräfte können direkt, also ohne Integration der Bewegungsgleichung, als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten angegeben werden.

Ausgangspunkt der Lagrangegleichungen 1. Art ist das d'Alembertprinzip

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (6.1)$$

Nicht-holonome und differentielle Nebenbedingungen treten in der Form

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (6.2)$$

auf, holonome Nebenbedingungen

$$f_i(q_1, \dots, q_{3N}; t) = 0 \longrightarrow a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}, \quad a_{it} = 0 \quad (6.3)$$

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial q_{3N}} dq_{3N} \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.4)$$

Erinnerung Die Darstellungen entsprechen also **exakten** Differentialen bei holonomen - und **inexakten** Differentialen bei nicht-holonomen Zwangsbedingungen. Die Gradienten der f_i müssen senkrecht auf den f_i stehen.

6 Die Lagrangegleichungen 1. Art

Für die virtuelle Verrückungen ($dt = 0$) lässt sich damit formulieren

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0 \quad \text{mit } i = 1, \dots, k \quad (6.5)$$

$$\longrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \quad : \quad \sum_{j=1}^{3N} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j \right) = 0 \quad (6.6)$$

Also gilt für d'Alembert und virtuelle Verrückungen

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot a_{ij} \right) \delta q_j = 0 \quad (6.7)$$

K der $3N$ virtuellen Verrückungen sind abhängig, ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien das die letzten $K : \delta q_{3N-k+1}, \dots, \delta q_{3N}$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot a_{ij} \right) \delta q_j \\ & + \sum_{j=3N-k+1}^{3N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot a_{ij} \right) \delta q_j = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Beide Summanden sind unabhängig voneinander 0. Die Klammern in 6.8 verschwinden sowieso beim subtrahieren des zweiten vom ersten Summanden und es folgt

$$\xrightarrow{\text{LG1}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot a_{ij} \quad j = 1, \dots, 3N \quad (6.9)$$

Offenbar stehen auf der rechten Seite der Lagrangegleichung 1. Art die Zwangskräfte. Das kann man daran sehen, dass man bei Aufhebung der Zwangsbedingung und der Einführung von Zusatzkräften, die die ursprüngliche Bahn beibehalten, auf der rechten Seite dann die entsprechenden generalisierten Kräfte ständen.

$$Z_j = \sum_{i=1}^K \lambda_i \cdot a_{ij} \quad (6.10)$$

Beachte Die Lagrangegleichungen 1. Art haben $3N$ Gleichungen und k Zwangsbedingungen und deshalb $3N+k$ Unbekannte. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich **nach** der Elimination der $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

6.1 Gebrauchsanweisung zum Aufstellen der Lagrangegleichungen 1. Art

1. Wähle $3N$ geeignete Koordinaten und formuliere die Zwangsbedingungen in differentieller Form (a_{ij} bestimmen $\rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial q_j}$)
2. Bestimme $\mathcal{L} = T - V$ als Funktion von q_j, \dot{q}_j mit $j = 1, \dots, 3N$
3. Berechne $3N$ Lagrangegleichungen 1. Art

6.1.1 Das Teilchen im Kreiskegel

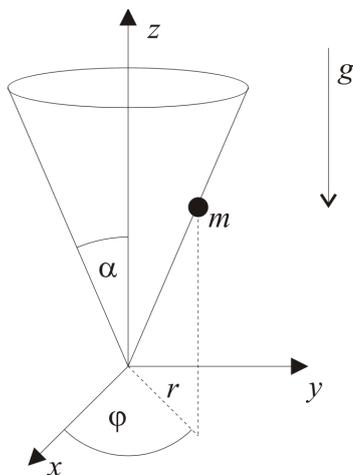


Abbildung 6.1: Eine Masse m bewegt sich reibungsfrei und unter Einfluss der Gravitationskraft in einem Kreiskegel

Quelle: Klassische Mechanik (Skript) - Prof.Dr.Günther Mahler; S.93

Die geeigneten Koordinaten für das Teilchen im Kreiskegel sind die Zylinderkoordinaten.

Die Nebenbedingung ist

$$f(r, z, \varphi) = r - z \tan(\alpha) = 0 \quad (6.11)$$

Schritt 1 - Koordinatenwahl

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial r} &= a_{1r} = 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= a_{1z} = -\tan(\alpha) \\ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} &= a_{1\varphi} = 0 \end{aligned}$$

6 Die Lagrangegleichungen 1. Art

Als Koordinaten zur Beschreibung bieten sich Zylinderkoordinaten an, da sie genau wie der Kreiskegel rotationssymmetrisch sind. Die Zylinderkoordinaten haben die Form

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Hier ist nun zu beachten, dass die Zwangsbedingung noch nicht genutzt werden darf, um verallgemeinerte Koordinaten zu erzeugen! Um die Zwangskräfte alle bestimmen zu können, muss eine Bewegungsgleichung für z aufgestellt werden, was nach dem Einsetzen nicht mehr möglich wäre. Die Zwangsbedingungen dürfen erst eingesetzt werden, wenn die Lagrangegleichungen nach den verschiedenen Koordinaten gebildet worden sind.

Schritt 2 - Bestimmung der Lagrangefunktion

Für die kinetische Energie folgt mit den gewählten Koordinaten

$$T = \frac{1}{2}m \left\{ \dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right\} \quad (6.13)$$

und die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left\{ \dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right\} - mgz \quad (6.14)$$

Beachte \mathcal{L} hängt von 3 Koordinaten ab, da z nicht durch die Zwangsbedingung eliminiert werden darf weil ein λ von z abhängt.

Schritt 3 - Berechnen der 3N Lagrangegleichungen

Damit ergibt sich für die Lagrangegleichungen 1. Art

$$\begin{aligned} a_{1z}\lambda &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \\ -\tan(\alpha)\lambda &= \frac{d}{dt} \left\{ m\dot{z} \right\} - \left\{ -mg \right\} \\ &= m\ddot{z} + mg \\ &= m\ddot{r} \cot(\alpha) + mg \end{aligned}$$

6 Die Lagrangegleichungen 1. Art

$$\begin{aligned}
 a_{1r}\lambda &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \\
 \lambda &= \frac{d}{dt} \left\{ m\dot{r} \right\} - m r \dot{\varphi}^2 \\
 &= m \left(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1\varphi}\lambda &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \\
 0 &= \frac{d}{dt} \left\{ m r^2 \dot{\varphi} \right\} \\
 &= m r^2 \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, dass es im Allgemeinen nicht nur ein λ gibt, sondern für **jede** Zwangsbedingung eines. Beim Kreiskegel gibt es nur eine Zwangsbedingung, also auch nur ein λ .

Bemerkung Da gilt $\frac{d}{dt} \left\{ m r^2 \dot{\varphi} \right\} = 0$ gilt $\dot{\varphi}$ ist eine Erhaltungsgröße und damit auch der zugehörige Drehimpuls. Damit folgt $\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{m r^2}$.

6.1.2 Das Rollpendel

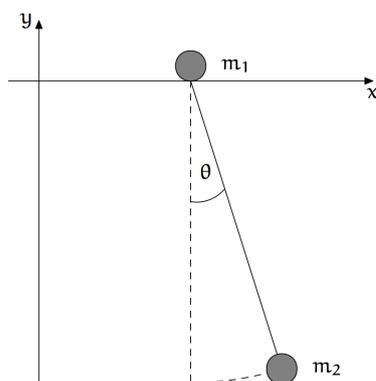


Abbildung 6.2: Man betrachte eine Masse m_2 , die in einem beweglichen Punkt x_0 der Masse m_1 fest mit einer Stange der Länge l aufgehängt sei. Beim Schwingen schlieÙe die Stange mit dem Lot vom Aufhängepunkt zum Boden mit der Stange den Winkel θ ein

Schritt 1 - Die Koordinatenwahl

Die angepassten Koordinaten seien x_1, y_1, r, φ , wobei r der feste Abstand sei. Für die Zwangsbedingungen an das Rollpendel lässt sich ausmachen

$$f_1(x, y, r, \theta) = y_1 = 0 \quad , \quad f_2(x, y, r, \theta) = r - l = 0 \quad (6.15)$$

Damit folgt für die Lagrangemultiplikatorkoeffizienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = a_{1y} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = a_{2r} = 1$$

Das Problem muss nun in kartesischen Koordinaten und ebenen Polarkoordinaten formuliert werden und keine der beiden holonomen Zwangsbedingungen darf benutzt werden, um generalisierte Koordinaten zu erzeugen.

Für die Ortsvektoren der beiden Massen ergibt sich

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + r \sin(\theta) \\ y_1 - r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Schritt 2 - Bestimmung der Lagrangefunktion

Für die kinetische Energie gilt

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(m_1 \left\{ \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \right\} + m_2 \left\{ \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + 2\dot{x}_1 \left[\dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta} \right] + 2\dot{y}_1 \left[r \sin(\theta) \dot{\theta} - \dot{r} \cos(\theta) \right] + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \right\} \right)$$

Für die potentielle Energie V des Systems folgt nach Superpositionsprinzip

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g y_1 - m_2 g \left(y_1 - r \cos(\theta) \right) \quad (6.17)$$

6 Die Lagrangegleichungen 1. Art

Damit lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \left(m_1 \left\{ \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \right\} + m_2 \left\{ \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 2\dot{x}_1 \left[\dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta} \right] + 2\dot{y}_1 \left[r \sin(\theta) \dot{\theta} - \dot{r} \cos(\theta) \right] + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \right\} \right) - m_1 g y_1 - m_2 g \left(y_1 - r \cos(\theta) \right)$$

Schritt 3 - Berechnen der 3N Lagrangegleichungen

Für die Lagrangegleichungen 1. Art folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ m_1 \dot{x}_1 - m_2 \dot{x}_1 + \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \dot{\theta} \right\} \\ &= m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_2 \left\{ \dot{r} \sin(\theta) + 2\dot{r} \cos(\theta) \dot{\theta} + r \cos(\theta) \ddot{\theta} - r \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \right\} \\ &\stackrel{6.15}{=} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_2 l \left\{ \cos(\theta) \ddot{\theta} - \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \right\} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ m_2 r^2 \dot{\theta} + m_2 \dot{x}_1 r \cos(\theta) + m_2 \dot{y}_1 r \sin(\theta) \right\} - \left\{ m_2 \dot{x}_1 \dot{r} \cos(\theta) - m_2 \dot{x}_1 r \sin(\theta) \dot{\theta} \right. \\ &\quad \left. + m_2 \dot{y}_1 r \cos(\theta) \dot{\theta} + m_2 \dot{y}_1 \dot{r} \sin(\theta) - m_2 g r \sin(\theta) \right\} \\ &= m_2 r^2 \ddot{\theta} + 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} + m_2 \ddot{x}_1 r \cos(\theta) + m_2 \dot{x}_1 \dot{r} \cos(\theta) - m_2 \dot{x}_1 r \sin(\theta) \dot{\theta} + m_2 \dot{y}_1 r \sin(\theta) \\ &\quad + m_2 \dot{y}_1 \dot{r} \sin(\theta) + m_2 \dot{y}_1 r \cos(\theta) \dot{\theta} - m_2 \dot{x}_1 \dot{r} \cos(\theta) + m_2 \dot{x}_1 r \sin(\theta) \dot{\theta} - m_2 \dot{y}_1 r \cos(\theta) \dot{\theta} \\ &\quad - m_2 \dot{y}_1 \dot{r} \sin(\theta) + m_2 g r \sin(\theta) \\ &\stackrel{6.15}{=} m_2 \ddot{x}_1 l \cos(\theta) + m_2 g l \sin(\theta) + m_2 l^2 \ddot{\theta} \\ &= \ddot{\theta} l + \ddot{x}_1 \cos(\theta) + g \sin(\theta) \end{aligned}$$

6 Die Lagrangegleichungen 1. Art

$$\begin{aligned}
 a_{1y_1} \lambda_1 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} \\
 \lambda_1 &= \frac{d}{dt} \left\{ m_1 \dot{y}_1 + m_2 \left(r \sin(\theta) \dot{\theta} - \dot{r} \cos(\theta) \right) + m_2 \dot{y}_1 \right\} - \left\{ -m_1 g - m_2 g \right\} \\
 &= m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \left\{ \dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} + r \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + r \sin(\theta) \ddot{\theta} - \ddot{r} \cos(\theta) + \dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} \right\} + m_2 \ddot{y}_1 \\
 &\quad + g(m_1 + m_2) \\
 &= (m_1 + m_2) \ddot{y} + m_2 \left\{ r \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + r \sin(\theta) \ddot{\theta} + \dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} - \ddot{r} \cos(\theta) + \dot{r} \sin(\theta) \dot{\theta} \right\} \\
 &\stackrel{6.15}{=} m_2 l \left(\cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \sin(\theta) \ddot{\theta} \right) + g(m_1 + m_2) = Z_{\text{Schiene}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1r} \lambda_2 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \\
 \lambda_2 &= \frac{d}{dt} \left\{ m_2 \dot{r} + m_2 \dot{x}_1 \sin(\theta) - m_2 \dot{y}_1 \cos(\theta) \right\} - \left\{ m_2 r \dot{\varphi}^2 + m_2 \dot{x}_1 \cos(\theta) \dot{\theta} + m_2 \dot{y}_1 \sin(\theta) \dot{\theta} \right. \\
 &\quad \left. + m_2 g \cos(\theta) \right\} \\
 &= m_2 \ddot{r} + m_2 \ddot{x}_1 \sin(\theta) + m_2 \dot{x}_1 \cos(\theta) \dot{\theta} - m_2 \ddot{y}_1 \cos(\theta) + m_2 \dot{y}_1 \sin(\theta) \dot{\theta} - m_2 r \dot{\theta}^2 \\
 &\quad - m_2 \dot{x}_1 \cos(\theta) \dot{\theta} - m_2 \dot{y}_1 \sin(\theta) \dot{\theta} - m_2 g \cos(\theta) \\
 &= m_2 \left(\ddot{r} + \ddot{x}_1 \sin(\theta) - \ddot{y}_1 \cos(\theta) - r \dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) \right) \\
 &\stackrel{6.15}{=} m_2 \left(\ddot{x}_1 \sin(\theta) - l \dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) \right) = -Z_{\text{Stange}}
 \end{aligned}$$

7 Das Hamilton'sche Prinzip

$$S[y] := \int_{t_0}^{t_1} d\tau \mathcal{L}(\mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau), \tau) \quad (7.1)$$

Das Wirkungsintegral des Hamiltonprinzips wirkt extremal, also

$$\delta S = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \sigma \quad (7.2)$$

7.1 Die Aufgabenstellung in der Variationsrechnung

Gegeben eine Funktion $F(y(x), y'(x), x)$, wobei $(y' = \frac{dy}{dx})$ und zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$.

Definition

$$I := \int_{x_1}^{x_2} dx F(y(x), y'(x), x) = I[y] \quad (\text{Wobei } [y] \text{ ein Funktional ist}) \quad (7.3)$$

Man betrachte differenzierbare Kurven $y(x)$, die bei P_1 beginnen und bei P_2 enden, d.h.

$$\begin{aligned} y : [x_1, x_2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y(x) \end{aligned}$$

I hat für $y(x)$ ein (relatives) Minimum bzw. Maximum

- $I[y]$ ist für alle benachbarten differenzierbare Kurven $\tilde{y}(x)$, die durch P_1 und P_2 gehen größer, bzw. kleiner als $I[y]$
- $\forall \varepsilon > 0 \forall \tilde{y} \in C^1[x_1, x_2]$ mit $|y(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon \forall x \in [x_1, x_2]$ mit $\tilde{y}(x_1) = y_1, \tilde{y}(x_2) = y_2$ gilt

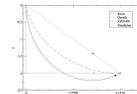
$$I[\tilde{y}] > I[y] \quad \text{bzw.} \quad I[\tilde{y}] < I[y] \quad (7.4)$$

Erinnerung: Extremwertaufgabe der Differentialrechnung

7.1.1 Beispiele

Das Brachistochronen-Problem (1696 Bernoulli)

Ein Massepunkt mit Masse m und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ soll im Gravitationsfeld reibungsfrei von $P_1 = (x_1, 0)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$. Welche Zwangskurve minimiert die Laufzeit T ?



$$T = \int_{P_1}^{P_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} \quad (7.5)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (7.6)$$

$$\text{und } \frac{mv^2}{2} = mgy \quad (7.7)$$

Abbildung 7.1: Teilchenposition nach 1s auf mehreren unterschiedlichen Bahnen vom eingezeichneten Anfangs- zum Endpunkt

Quelle: Das Brachistochronenproblem - Ulrich Langenfeld, S.2

Daraus ergibt sich also

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} = T[y, y']$$

Aus der Variationsrechnung lassen sich auch die Lagrangegleichungen 2.Art, auch Euler-Lagrange-Gleichungen genannt, herleiten. Daraus lässt sich schließen, dass auch die Euler-Lagrange-Gleichungen einen extremalen Sachverhalt für vollständig holonome Nebenbedingungen ausdrücken. Maupertuis legte 1747 die Grundlage für das „Prinzip der kleinsten Wirkung“, indem er postulierte, dass die Natur unter allen möglichen Bewegungen diejenige auswähle, die ihr Ziel mit dem geringsten Aufwand von Aktion(Wirkung) erreiche. Dies lässt sich mit der Herleitung der Euler-Lagrange Gleichungen aus der Variationsrechnung zeigen.

Minimalfläche zwischen 2 Kreisen

Eine Seifenhaut, die zwischen 2 Kreise gespannt ist, soll eine minimale Fläche haben. Die Größe der Rotationsfläche lässt sich ausdrücken mit

$$F = \int_{P_1}^{P_2} 2\pi y ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2} \quad (\text{vgl.vorher}) \quad (7.8)$$

7 Das Hamilton'sche Prinzip

Euler (1707 - 1783) : Variationsrechnung → Differentialgleichung

Schreibe „benachbarte“ Kurven zu y um $\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, ansonsten $\eta(x)$ beliebig.

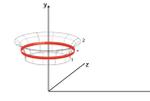


Abbildung 7.2: Skizze zur minimalen Rotationsfläche zwischen 2 Kreisscheiben

Quelle: Theoretische Physik II - Analytische Mechanik (Skript) - Prof. Dr. Ulrich Schwarz, S.37

$$I_\eta(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \quad (7.9)$$

I ist also extremal für

$$y \leftrightarrow \frac{dI_\eta(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0 \quad \forall \eta \in C^1([x_1, x_2]) \quad (7.10)$$

Also gilt

$$\left. \frac{dI_\eta}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta' \right) \quad (7.11)$$

nach der partiellen Integration des zweiten Summanden folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (7.12)$$

weshalb gilt

$$\forall \eta \in C^1([x_1, x_2]) : \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \eta(x) = 0 \quad (7.13)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad (7.14)$$

Die Gleichung 7.14 heißt die **Euler-Lagrange-Gleichung**. Analog mit n Veränderlichen y_1, \dots, y_n .

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_1(x), \dots, y_n(x); y_1'(x), \dots, y_n'(x); x) \quad (7.15)$$

$I[y_1, \dots, y_n]$ sei nun extremal, dann gilt

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad (7.16)$$

Die Formulierung ist allerdings nicht hinreichend für eine Äquivalenz.

7.1.2 Verkürzende Schreibweise

Definition $\varepsilon\eta_i(x)$ und $\varepsilon\eta'_i(x)$ heißen Variation von $y_i(x)$ und $y'_i(x)$, wobei man auch verkürzt schreiben kann (Reihenfolge) $:= \delta y_i$; $:= \delta y'_i$.

Es gilt weiterhin

$$\delta y'_i = \frac{d}{dx} \delta y_i \quad (7.17)$$

Das bedeutet, Variation und Differentiation sind vertauschbar.

Definition δI (erste) Variation des Integrals $:=$ erste Näherung der Differenz $I[\tilde{y}] - I[y]$ mit $\tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \delta y_i(x)$.

$$\begin{aligned} \delta I &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta y_i \left. \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) \delta y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) \delta y_i \end{aligned}$$

Das führt auf den Fundamentalsatz der Variationsrechnung ELG

$$\delta I = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (7.18)$$

d.h. I ist für die Kurven $y_i(x)$ stationär!

I ist für y_i minimal oder maximal $\rightarrow \delta I = 0$ d.h. I stationär; y_i erfüllen ELG.

7.2 Das Hamilton'sche Prinzip

Die Bewegung eines mechanischen Systems von einem gegebenen Anfangspunkt zur Zeit t_1 zu einem gegebenen Endpunkt zur Zeit t_2 verläuft derart, dass die **Wirkung**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(y(t), y'(t), t) \quad (7.19)$$

stationär ist, das heißt

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} = 0 \quad (7.20)$$

hamilton'sche Prinzip, auch Prinzip der stationären Wirkung (An dieser Stelle benötigt man die Lagrangegleichungen 2.Art, das ganze funktioniert auch für Lagrangegleichungen 1.Art, das wäre dann Variationsrechnung unter Nebenbedingungen).

Wenn \mathcal{L} von allen $3N$ Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängt, so ist das Hamiltonprinzip äquivalent zu den Lagrangegleichungen 1.Art. Wenn \mathcal{L} bei k holonomem Nebenbedingungen von $3N - k$ unabhängigen Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängt, führen die Euler-Lagrange Gleichungen des Hamilton'schen Prinzips auf die Lagrangegleichungen 2.Art.

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3N-k} \int_{t_1}^{t_2} dt' \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (7.21)$$

δq_i sind bis auf $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ beliebig, das Ergebnis sind dementsprechend Lagrangegleichungen 2.Art. Das hamilton'sche Prinzip und die Lagrangegleichungen 2.Art sind also äquivalent.

S ist nicht notwendigerweise Extremal, da das für physikalische Fragen irrelevant ist. Aber meistens ist S minimal, weshalb es auch das Prinzip der kleinsten Wirkung genannt wird.

Bemerkenswert dabei erscheint, dass das Teilchen ja den Endpunkt seiner Bewegung kennen müsste - das Wirkungsintegral hat ja den Anfangs- und Endpunkt als seine Grenzen. Die Bahn, die mithilfe des Hamilton'schen Prinzip bestimmt wird, wird nicht aus den $2 \cdot 3N - k$ Anfangswerten $q_1(0), \dot{q}_i(0)$ bestimmt, sondern aus $2 \cdot 3N - k$ Anfangs- und Endkoordinaten zur Zeit t_1 und t_2 . Trotzdem ist das Prinzip kausal, da das Prinzip der kleinsten Wirkung der Geometrie der Mannigfaltigkeit entspricht.

8 Zentralkraftbewegungen

Zweikörperproblem:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (8.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (8.2)$$

wobei $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ der Verbindungsvektor der beiden Punkte sei. F hänge nur von \mathbf{r} und $\dot{\mathbf{r}}$ ab. Der Raum sei homogen.

Schwerpunkt:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{8.1, 8.2} \ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (8.3)$$

und es gilt $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. Man definiert $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} =: m$ als **reduzierte Masse**.

Für Zentralkräfte gilt

$$F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = F(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_r \quad (8.4)$$

wobei $f(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige skalare Funktion ist. Außerdem gilt für Zentralkräfte die **Drehimpulserhaltung** (siehe 1.30) - φ ist in Kugelkoordinaten zyklisch).

Das Zentralkraftfeld ist konservativ, also gilt $f(\mathbf{r}, t) = f(r, t)$ d.h. Rotationssymmetrie, denn

$$\nabla \times (f(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_r) = \frac{f(\mathbf{r}, t)}{r} \cdot \nabla \times \mathbf{r} + \nabla \left(\frac{f(\mathbf{r}, t)}{r} \right) \times \mathbf{r} \quad (8.5)$$

Der Gradient ist nur parallel zu r , wenn das Problem rotationssymmetrisch ist, also $f(\mathbf{r}, t) = f(r, t)$ gilt. Dann verschwindet allerdings auch die Rotation.

Man betrachte im Folgenden $F(\mathbf{r}) = f(r) \cdot \mathbf{e}_r$, d.h. $F = \nabla V(r)$ mit rotationssymmetrischem Potential $V(r)$.

Da $\mathbf{L} = \text{const.}$ gilt, verläuft die Bewegung in einer Ebene, die senkrecht zu \mathbf{L} steht. Das Skalarprodukt $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = 0$ verschwindet, da man die vorangegangene Formulierung auch als die Determinante einer 3×3 Matrix aus allen 3 Vektoren ausdrücken kann, die verschwinden muss, da sie keinen Höchstrang hat - 2 Vektoren sind ja identisch.

8 Zentralkraftbewegungen

Nun wähle man die z -Achse parallel zu \mathbf{L} und führe die ebenen Polarkoordinaten in der zu \mathbf{L} senkrechten Ebene ein.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

p_φ ist erhalten, das bedeutet

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}^2 = \text{const.} \quad (8.6)$$

Da das Problem nicht mehr explizit zeitabhängig ist, ist auch die Energie erhalten. Die Kräfte sind konservativ, also gilt für die Gesamtenergie

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.} \quad (8.7)$$

E ist also offensichtlich erhalten, weshalb gilt

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) \quad (8.8)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \right)} \quad (8.9)$$

$$\begin{array}{l|l} \dot{r} > 0 & \text{Das Teilchen läuft vom Koordinatenursprung weg} \\ \dot{r} < 0 & \text{Das Teilchen läuft auf Koordinatenursprung zu} \end{array}$$

Der Umkehrpunkt ist bestimmt durch

$$V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} = E \quad (8.10)$$

Aus 8.9 folgt dann für die Zeit t

$$t = \pm \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \right)}} \quad (8.11)$$

8 Zentralkraftbewegungen

Für $r(t)$ und 8.6 folgt für $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \frac{p_\varphi}{m} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')} + \varphi_0 \quad (8.12)$$

Die geometrischen Bahnen: $\varphi(r)$

Mit 8.9 folgt

$$dt \pm \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \right)}} \quad (8.13)$$

und mit 8.6 folgt

$$dt = \frac{m}{p_\varphi} r^2 d\varphi \quad (8.14)$$

Insgesamt folgt also

$$\varphi(r) = \pm \frac{p_\varphi}{m} \int_{r_0}^r \frac{r'^{-2} dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \right)}} \quad (8.15)$$

Bemerkungen

1. Die Lagrangegleichungen 2.Art führen natürlich ebenfalls zum Ziel
2. $\varphi = 0$ bei Umkehrpunkt \rightarrow Es reicht also, Bewegung von r_{max} nach r_{min} oder r_{min} nach r_{max} zu kennen

8.1 Das Keplerproblem

Das Potential $V(r)$ wird beschrieben durch

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} = -\frac{\alpha}{r} \quad (8.16)$$

Für die Masse lassen sich folgende Beschreibungen ausmachen

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \alpha = \gamma m_1 m_2 \quad (8.17)$$

8 Zentralkraftbewegungen

Damit folgt für die Bahn $\varphi(r)$

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \pm \int \frac{dt}{r^2 \sqrt{\frac{2me}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2 r} - \frac{1}{r^2}}} \\ &= \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2me}{p_\varphi^2} + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} x - x^2}}\end{aligned}$$

Das so erreichte Integral hat nun also die Form

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arccos \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ax}} \right) \\ &\text{für } a < 0 \text{ und } b^2 - 4ac > 0\end{aligned}$$

Man kann also das Integral vereinfachen zu

$$\varphi(r) = \hat{\varphi}_0 + \arccos \left(\frac{-\frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \frac{1}{r} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}} \right) \quad (8.18)$$

Auflösen nach $\frac{1}{r}$ liefert dann

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \underbrace{\frac{m\alpha}{p_\varphi^2}}_{:=\frac{1}{\rho}} \left(1 - \underbrace{\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}}_{:=\varepsilon} \cos(\varphi - \hat{\varphi}_0) \right) \quad (8.19)$$

Damit ergibt sich für die Bahn des Keplerproblems

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) \right) \quad (8.20)$$

Die Keplergleichung ist die allgemeine Kegelschnittgleichung mit einem Brennpunkt im Koordinatenursprung.

ρ ist dabei der „Parameter“, ε der „Exzentrizität“ und φ_0 das „Perihel“ (der Punkt, der der Koordinatenursprung am nächsten kommt). Das „Aphel“ ist der Punkt, der vom Ursprung am weitesten entfernt ist, also das Perihel des anderen Brennpunkts.

8 Zentralkraftbewegungen

Allgemein gibt es nun 4 Bahnformen:

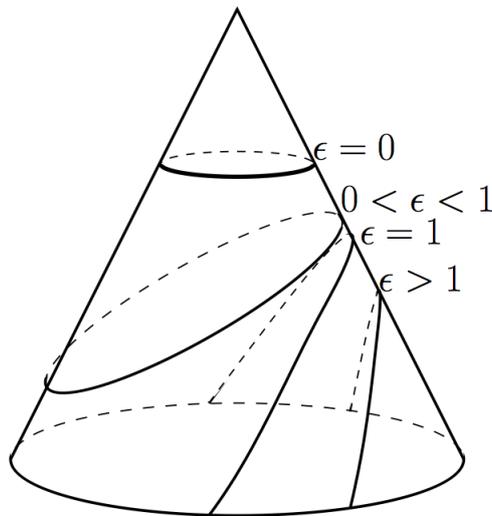
Wert für ε	Bahnform	Bahneigenschaften
$\varepsilon = 0$	Kreisbahn	$R = \rho = \frac{\rho_\varphi^2}{m\alpha}$, $E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{2r}$
$0 < \varepsilon < 1$	Ellipse	Perihel: $r_p = \frac{\rho}{1+\varepsilon}$, Aphel: $r_A = \frac{\rho}{1-\varepsilon}$ Große Halbachse: $\frac{r_p+r_A}{2} = \frac{\rho}{1-\varepsilon^2} = \frac{-\alpha}{2E}$
$\varepsilon = 1$	Parabel	Perihelabstand: $r_p = \frac{\rho}{2}$
$\varepsilon > 1$	Hyperbel	Perihelabstand: $r_p = \frac{\rho}{1+\varepsilon}$

Als Erklärung zu $\varepsilon = 0$: Es gilt

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = mR^2\frac{v}{R}, \text{ da } \dot{\varphi} = \frac{v}{r} \quad (8.21)$$

Außerdem gilt

$$E_{\text{Kreis}} = -\frac{\alpha}{2R}, \quad E_{\text{Ellipse}} = -\frac{\alpha}{2a} \quad (8.22)$$



Geometrische Darstellung der 4 Bahnformen als Kegelschnitte

Skriptum zur Vorlesung Analytische Mechanik - Andreas Honecker; S.85

8.2 Das effektive Potential

Die qualitative Aussage über radiale Bewegungen eines Teilchens ist mit der Einführung eines qualitativen Potentials leicht möglich

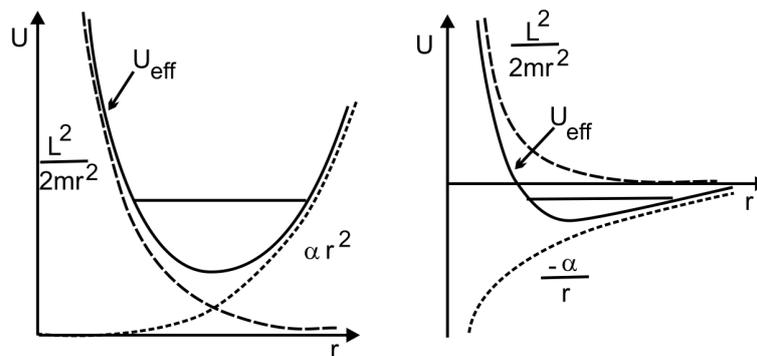
$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r) + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (8.23)$$

Das Effektive Potential ist in diesem Fall einfach

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2} \quad (8.24)$$

Das effektive Potential taucht auch wieder in der Quantenmechanik.

Das Keplerproblem

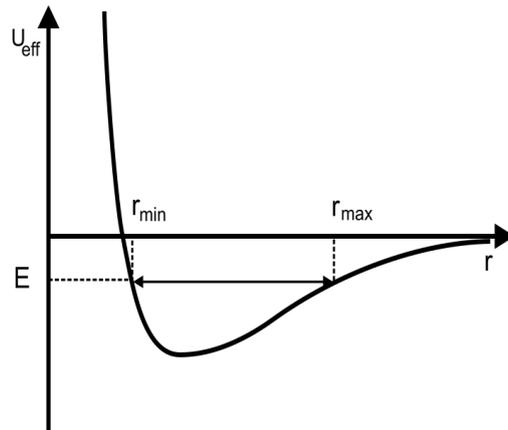


Effektives Potential für harmonisches Oszillatorpotential und Keplerpotential

Quelle: Theoretische Physik : Mechanik -Skriptum zur Vorlesung- Prof. Dr. H.-J. Kull; S.61

Ein Teilchen, dessen Energie zwischen den Nullstellen des effektiven Potentials liegt, oszilliert zwischen 2 Punkten (Perihel und Aphel) der gleichen Energie, befindet sich also auf einer gebundenen Bahn. Die Gesamtenergie ist die Summe aus kinetischer - und potentieller Energie.

8 Zentralkraftbewegungen



Skizze zu einer gebundenen Bahn im Keplerpotential

Quelle: Theoretische Physik : Mechanik - Skriptum zur Vorlesung - Prof. Dr. H.-J. Kull; S.64

Ein Teilchen, das die Energie des Potentialminimums hat, befindet sich also auf einer Kreisbahn, da der Radius immer konstant ist.

$E > 0 \rightarrow$ unendliche Bahn, „Streuung“; r_1 wird nie unterschritten - sollte $p_\varphi = 0$ stürzt das Teilchen ins Zentrum des Gravitationspotentials

$E \leq$ finite gebundene Bahn, Zustand zwischen r_{min} und r_{max} .

Für $E =$ Potentialminimum \rightarrow konstanter Radius, Teilchen beschreibt Kreisbahn:

$$\left. \frac{dV_{eff}}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \quad \rightarrow \quad r_0 = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \quad (8.25)$$

Lineares Potential im Kreiskegel

Konstanter Radius, also Kreisbahn bei r_0, E_{min} .

Berechnung von r_0 für die Bewegung auf einer Kreisbahn im Kreiskegel

$$V_{eff}(r) = \gamma r + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

$$\rightarrow r_0 = \left(\frac{p_\varphi^2}{mg} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$V_{eff}^{min}(r) = \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma^2 p_\varphi^2}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Ist die Bewegung zwischen r_{min} und r_{max} geschossen?

8 Zentralkraftbewegungen

$$\Delta\varphi = 2\frac{p_\varphi}{m} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - v(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \right)}}$$

Die Bahn ist also geschlossen, wenn $\Delta\varphi = \frac{m}{2}2\pi$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$. Die Bahn schließt sich nach $\frac{n}{2}$ Umläufen.

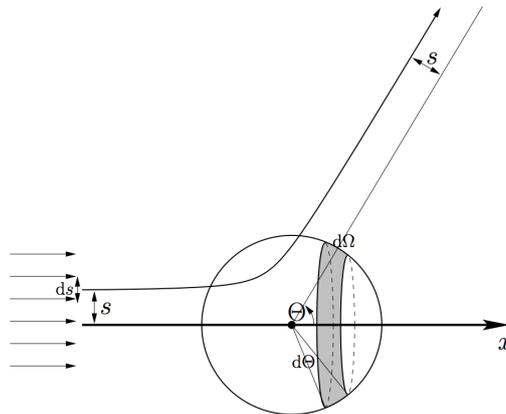
Beispielfigur für nach einem Umlauf ungeschlossene Bahn.

Es existieren nur 2 Potentiale deren finite Bahnen für alle Anfangsbedingungen immer geschlossen sind; nämlich das Keplerpotential $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ und das Potential des harmonischen Oszillators $V(r) = ar^2$. Für alle anderen Potentiale sind die Bahnen Perihel- und Apheldrehungen.

8.3 Streuung im Zentralkraftfeld

Die Streutheorie ist eigentlich weniger in der makroskopischen Physik als in der mikroskopischen Physik ein wichtiger Bestandteil. Mit Streuexperimenten lassen sich allerdings viele interessante Eigenschaften und Effekte beobachten, unter anderem die Wechselwirkungen unter Teilchen, über Energieniveaus, die Ausdehnung und die innere Struktur von atomaren und subatomaren Teilchen in der Quantentheorie.

Die Methodik der Quantenmechanik und der klassischen Mechanik ist an dieser Stelle gleich, daher folgt nun die gleiche Einführung für beide.



“Versuchsaufbau“ zur Streuung

Skriptum zur Vorlesung Analytische Mechanik - Andreas Honecker, S.86

8 Zentralkraftbewegungen

Die Strahlintensität oder auch die Teilchenstromdichte I ist

$$I = \frac{\text{Anzahl der Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche} \perp \text{Strahl}}$$
$$[I] = \frac{1}{\text{sm}^2}$$

Die Zahl der gestreuten Teilchen dN pro Zeit, pro Raumwinkel.

Die Präparation des Strahls mit speziellem Stoßparameter s

Editor Skizze Filter für Entfernung des zu streuenden Teilchens zur Symmetrieachse, auf der das Teilchen an dem gestreut werden soll sitzt.

Der Stoßparameter s bestimmt den Drehimpuls bezüglich des Streuzentrums, für den Drehimpuls p_φ in φ Richtung gilt damit

$$p_\varphi = mv_0s = \sqrt{2mes} \quad (8.26)$$

8.3.1 Der differentielle Streuquerschnitt

Definition Der differentielle Streuquerschnitt $\sigma(\Phi, \Theta)$ ist definiert als

$$\sigma(\Phi, \Theta)d\Omega = \frac{dN(\Phi, \Theta)}{I}$$
$$= \frac{\text{Anzahl der Teilchen pro Sekunde in den Raumwinkel } [\Omega, \Omega + d\Omega] \text{ gestreut}}{\text{Intensität } I \text{ der einfallenden Teilchen}}$$
$$[d] = 1\text{b} = 1\text{barns} = 10^{-28}\text{m}^2 \text{ (Aus Kernphysik)}$$

Der einfachste Fall ist die elastische Zweiteilchenstreuung im Zentralkraftpotential. Dabei gilt für das Potential

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \quad (8.27)$$

Wegen der Rotationssymmetrie hängt der Wirkungsquerschnitt nicht vom Polarwinkel Φ ab. Wähle

$$d\Omega = \text{Ring auf der Einheitskugel} \quad (\Theta \in [\tilde{\Theta}, \tilde{\Theta} + d\tilde{\Theta}], \Phi \in [0, 2\pi]) \quad (8.28)$$

8 Zentralkraftbewegungen

Daraus folgt dann für

$$\sigma(\Theta)2\pi \sin(\Theta)d\Theta = \frac{dN(\Theta)}{I} \quad (8.29)$$

Damit gilt für den Stoßwinkel Θ , dass er eineindeutig (außer für $\frac{1}{r^2}$) dem Stoßparameter s entspricht.

$$dN(\Theta) = I \cdot 2\pi s \cdot ds \quad (8.30)$$

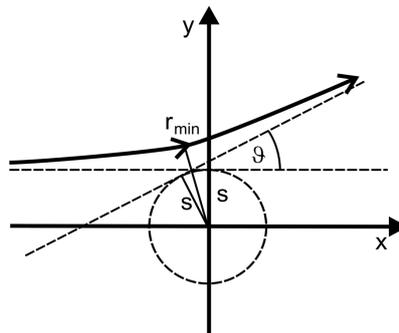
Der Streuquerschnitt von Θ ist also

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin(\Theta)} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| \quad 0 \leq \Theta \leq \pi \quad (8.31)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann nun durch Berechnung von $\Theta(s)$ ermittelt werden, anschließend leitet man die Umkehrfunktion $s(\Theta)$ nach Θ ab. Der Streuwinkel Θ liegt zwischen 0 und π , also kann - der Intuition entsprechend - ein Aufprall auf der oberen Kugelhälfte nicht unter den Kugeläquator gestreut werden.

$$\begin{aligned} \Theta &= \pi - 2\varphi_0 \\ \varphi_0 &= \varphi(r \rightarrow \infty) - \varphi(r_{min}) \\ &= \frac{p_\varphi}{m} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \right)}} \quad \text{Substitution: } x = \frac{1}{r} \\ &= s \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{V(x)}{E} - s^2 x^2}} \end{aligned}$$

8.3.2 Die Rutherford Streuung



Skizze zur Rutherfordstreuung mit Stoßparameter s

Quelle: Theoretische Physik : Mechanik - Skriptum zur Vorlesung - Prof. Dr. H.-J. Kull; S.72

8 Zentralkraftbewegungen

Es gelte im Folgenden

$$V(r) = \frac{k}{r} \quad , \quad P = \frac{p_\varphi^2}{mk} \quad , \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E p_\varphi^2}{mk^2}}$$

wobei $V(r)$ ein abstoßendes Coulombpotential (und damit äquivalent zu einem abstoßenden Keplerpotential) sei und $\varepsilon > 1, E > 0$ gelte.

Mit der Lösung des Keplerproblems und unter Beachtung des Vorzeichens von α im Keplerproblem folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left(-1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) \right) \quad (8.32)$$

r ist nun minimal für $\varphi = \varphi_0$, der Polarwinkel des Perihels ist dabei als φ_0 . $\varphi = 0$ für einlaufendes Teilchen aus ∞ , deshalb gilt $-1 + \varepsilon \cos(\varphi) = 0$, weshalb gilt $\cos(\varphi_0) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Die Bahn ist symmetrisch bezüglich des Perihels $\rightarrow \Theta = \pi - 2\varphi_0 \rightarrow \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \cos(\varphi_0) = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E p_\varphi^2}{mk^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{k}\right)^2}}$ mit $p_\varphi = \sqrt{2mEs}$.

Das Auflösen nach s liefert dann

$$s = \frac{k}{2E} \cot\left(\frac{\Theta}{2}\right) \quad (8.33)$$

mit 8.31 folgt nun für $\sigma(\Theta)$

$$\begin{aligned} \sigma(\Theta) &= \frac{s}{\sin(\Theta)} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right| \\ &= \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \frac{\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\sin(\Theta)} \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Diese Formel nennt man den Rutherford'schen Streuquerschnitt, dieser ist unabhängig vom Vorzeichen von k . Das klassische Ergebnis entspricht dem Quantenmechanischen Ergebnis!

8.3.3 Definition des totalen Wirkungsquerschnittes

$$\sigma_{\text{Total}} = \int_{\Omega} \sigma(\Omega) d\Omega \stackrel{8.28}{=} 2\pi \int_0^\pi d\Theta \sin(\Theta) \quad (\infty \text{ für Rutherfordpotential}) \quad (8.34)$$

9 Beschleunigte Bezugssysteme

Im Vorangegangenen wurden Bewegungsgleichungen in Inertialsystemen betrachtet, im Folgenden werden Bewegungsgleichungen in beschleunigten Bezugssystemen betrachtet. Man betrachte die folgende, zeitabhängige Transformationsvorschrift

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(\mathbf{q}; t) \quad (9.1)$$

Da die Lagrangefunktion \mathcal{L} Forminvariant ist, ergibt sich für diese

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) &= \mathcal{L}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, t), t) \\ \delta S &= \delta \int \mathcal{L} dt = 0 && \text{entlang } C_q(\text{Bahnim } \mathbf{q} - \text{Raum}) \\ \rightarrow \delta S &= 0 && \text{entlang } C_Q(\text{Bahnim } \mathbf{Q} - \text{Raum}) \\ \rightarrow \text{LG2 bzw. ELG} & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i} = 0 \end{aligned}$$

Bei rotierenden Bezugssystemen gilt für beschleunigte Bezugssysteme, dass Translation des Ursprungs und Rotation um den Ursprung auftreten.

Zunächst betrachte man ein Teilchen ohne Zwangsbedingungen

Bezugssystem	Basis
S	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
S'	$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$

Für die Drehachse gelte im Folgenden, dass sie parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ liege, die Winkelgeschwindigkeit ist nun $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i = \mathbf{r}'(t) \end{aligned}$$

9 Beschleunigte Bezugssysteme

Die Ortsvektoren der Teilchen in den unterschiedlichen Bezugssystemen sind also identisch.

Bei rotierenden Basisvektoren gilt

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i \quad (9.2)$$

Hierzu betrachte man $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{e}_z$, also gelte für $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

Für die rotierenden kartesischen Einheitsvektoren folgt damit sofort

$$\mathbf{e}'_x = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_y = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Da die neuen Einheitsvektoren nun explizit bekannt sind, sind sie auch ableitbar. Für ihre Ableitungen ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}'_x &= \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x \\ \dot{\mathbf{e}}'_y &= \omega \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y \end{aligned}$$

Die aufgestellte Beziehung in 9.2 ist also nun verifiziert. Ergebnis der Rechnung ist allerdings auch, dass die Geschwindigkeiten in S und S' also unterschiedlich sind

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{v}(t) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + x'_i \dot{\mathbf{e}}'_i \right) \\ &\stackrel{9.2}{=} \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i \right) \end{aligned}$$

9 Beschleunigte Bezugssysteme

Daraus folgt schließlich für die neue Geschwindigkeit des Teilchens im rotierenden Bezugssystem

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (9.5)$$

Wenn $\mathbf{v}' = 0$ gilt, bedeutet das, dass das Teilchen sich mit dem Koordinatensystem bewegt, also trotzdem nicht in Ruhe ist.

Die Lagrangefunktion des Teilchens lautet

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (9.6)$$

Damit folgt

$$\mathcal{L}'(\mathbf{r}', \mathbf{v}') = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r})$$

mit $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

Also gilt für \mathcal{L}'

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i{}^2 + m \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \dot{x}'_i \omega_j x'_k + \frac{1}{2}m \left(\sum_{i=1}^3 x'_i{}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \right) - \frac{1}{2}m \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i x'_i \right) - V(\mathbf{r})$$

Die Lagrangegleichung 2.Art hat die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}'_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'_i} \quad (9.7)$$

also in unserem Fall

$$m \left[\ddot{x}'_i + \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \dot{\omega}'_j x'_k + 2 \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega'_j \dot{x}'_k - \dot{x}'_i \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \right) + \omega_i \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j x'_j \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial x'_i} = 0$$

Also

$$m\mathbf{a}' = -\nabla V - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (9.8)$$

Da nur konservative Kräfte auftreten, gilt $\mathbf{F} = -\nabla V$ in Summe mit 3 Trägheitskräften (den sogenannten Scheinkräften). $m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ ist 0 bei gleichförmiger Rotation, die Corioliskraft hat die Form $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$. Die Zentrifugalkraft hat die Form $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$.

9 Beschleunigte Bezugssysteme

Erklärung zur Zentrifugalkraft:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} \quad \text{mit } \mathbf{r}_{\parallel} \parallel \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_{\perp} \perp \boldsymbol{\omega} \quad (9.9)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) \\ &= m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} \end{aligned}$$

Beispiel S' sei ein gleichförmig rotierendes Bezugssystem mit $\boldsymbol{\omega}$, S sei ein Inertialsystem, das sich gleichförmig gradlinig bewegt oder ruht.

a) Falls das Teilchen in S ruht ($v = 0$) $\rightarrow \mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ und $m\mathbf{a}' = -2m\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, also wirkt in S' eine Zentralbeschleunigung $\mathbf{a}' = -\omega^2 \mathbf{r}$.

b) Teilchen rotiert in S mit $\boldsymbol{\omega}$. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= -m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{F} = -\nabla V \\ \mathbf{v}' &= 0, \mathbf{a}' = -\frac{1}{m} \nabla V - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &\rightarrow -\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} + \omega^2 \mathbf{r}_{\perp} = 0 \end{aligned}$$

Perle auf rotierendem Draht Eine Perle gleite reibungsfrei auf einem Draht und werde nach außen geschleudert. Der Draht übt also die Kraft \mathbf{F}_D auf die Perle aus

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}' &= \mathbf{F}_D - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ \rightarrow m\ddot{x}' \mathbf{e}_1 &= \mathbf{F}_D - 2m\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}' \mathbf{e}_1) - m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{e}_1)] \\ &= \mathbf{F}_D - 2m\omega \dot{x}' \mathbf{e}_2 + m\omega^2 x' \mathbf{e}_1 \\ \rightarrow m\ddot{x}' &= m\omega^2 x' \\ \mathbf{F}_D &= 2m\omega \dot{x}' \mathbf{e}_2 = -\mathbf{F}_{\text{Coriolis}} \end{aligned}$$

Der Draht fängt also die Corioliskraft ab. \mathbf{F}_D leistet nun Arbeit, da die Perlenbewegung eine Komponente in y' -Richtung hat.

9.1 Die Corioliskräfte der Erdrotation

Ruhende Körper auf der Erdoberfläche erfahren Zentrifugalkräfte

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_Z &= -m\ddot{\mathbf{R}} \\ &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \\ &= m\omega^2 \mathbf{R}_\perp\end{aligned}$$

Damit folgt für die Erdbeschleunigung

$$g = g_0 + \omega^2 \mathbf{R}_\perp \quad (9.10)$$

Bewegte Körper sind der Corioliskraft ausgesetzt, dabei liegt die Corioliskraft in der Äquatorebene. Daraus folgt eine Rechtsablenkung auf der Nordhalbkugel und eine Linksablenkung auf der Südhalbkugel bei einer horizontalen Bewegung.

Corioliskräfte bestimmen das Wetter:

- 1) Außertropische Zyklonen (Tiefdruckgebiete) und Antizyklonen (Hochdruckgebiete) - Durchmesser etwa 1000 km, Sturm(Windstärke 9), Orkan(Windstärke 12) \sim 130 km/h
- 2) Tropische Wirbelstürme (Hurrikane im Atlantik, Taifun im Pazifik) \sim 300 km/h, Tornados Durchmesser etwa 500m, Windgeschwindigkeiten \sim 400km/h
- 3) Passat Winde (Sonneneinstrahlung)
- 4) Meeresströmungen (Golf-Strom)

9.2 Vorgehensweise für N -Teilchen mit Nebenbedingungen im rotierenden Bezugssystem

Gebrauchsanweisung

- Stelle die Lagrangegleichung für die N -Teilchen im Inertialsystem auf
- Transformiere die Lagrangegleichungen ins rotierende Bezugssystem für jeden einzelnen Massepunkt $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ mit $i = 1, \dots, n$
- Zwangsbedingungen im rotierenden Bezugssystem in die Lagrangefunktion einsetzen
- Formulierung des Problems in unabhängigen Koordinaten und Transformation in diese
- Aufstellung der Bewegungsgleichungen

10 Der starre Körper

Ein starrer Körper ist ein System von Massepunkten (beispielsweise Atome), die Struktur des zu betrachtenden starren Körpers sei derart, dass der Abstand der Massepunkte zueinander, wie auch die Differenzvektoren der Massepunkte untereinander konstant sei. Diese Betrachtung ist eine Modellbetrachtung, also ist sie **idealisiert**.

Der starre Körper kann Rotationen und Translationen ausführen, er besitzt 6 Freiheitsgrade, 3 der Rotation und 3 der Translation. Die Translation ist eine Schwerpunktsbewegung (siehe Kap.1. link setzen). Bei der Rotation treten „verblüffende Effekte“ auf.

10.1 Das Euler-Theorem

Die Bewegung des starren Körpers besteht aus Translation und Rotation, wobei bei der Translation die Winkellage des Körpers unverändert bleibt und die Geschwindigkeit aller Massepunkte gleich ist und bei der Rotation eine Drehung um einen beliebigen körperfesten Koordinatenursprung beschrieben wird.

- Skizze starrer Körper Quader mit Achssystem in kartesischem Koordinatensystem
-

Zur Beschreibung des starren Körpers bzw. seinen Bewegungsformen im Raum sind 2 Koordinatensystem nötig: Das des starren Körpers und das des Raumes. Im Folgenden seien die Systeme benannt wie aufgeführt

\mathbf{r}_I Inertialsystem
 \mathbf{r} Körperfestes Koordinatensystem

Die Translation des starren Körpers ist festgelegt durch 3 Koordinaten, die Drehachse und die Drehwinkelgeschwindigkeiten sind wiederum durch 3 Koordinaten festgelegt. Der starre Körper hat also 6 Freiheitsgrade.

Für die Geschwindigkeit des Körpers gelte nun

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (10.1)$$

wobei \mathbf{v}_0 die Geschwindigkeit des Koordinatenursprungs im Inertialsystem und $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit sei.

Für den Ortsvektor von P im Körperfesten Koordinatensystem gilt

$$\mathbf{r} = \overline{0P} \quad (10.2)$$

und für dessen Geschwindigkeit im Inertialsystem gilt mit 10.1

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (10.3)$$

Offensichtlich hängt \mathbf{v}_0 von der Wahl von 0 ab, $\boldsymbol{\omega}$ allerdings nicht.

10.2 Die kinetische Energie und der Trägheitstensor

Ein starrer Körper mit n Massepunkten m_α ($\alpha = 1, \dots, n$) und den Ortsvektoren der Massepunkte \mathbf{r}_α hat im Inertialsystem die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_\alpha (\mathbf{v}_{I\alpha})^2 = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_\alpha (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_0^2 + \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_\alpha \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich also für T

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \quad (10.4)$$

Es gibt also nun 2 Fälle: Entweder der starre Körper wird in keinem Punkt festgehalten, der körperfeste Koordinatenursprung 0 liege nun im Schwerpunkt. Es ergibt sich in diesem Fall

$$T_W = 0 \quad \mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{m} = \mathbf{0} \quad (10.5)$$

Im zweiten Fall werde der starre Körper in mindestens einem Punkt festgehalten und der körperfeste Koordinatenursprung 0 liegt in eine dieser Punkte. Damit ergibt sich für \mathbf{v}_0 und in folge dessen auf für andere Systemaspekte

$$\mathbf{v}_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad T_{\text{trans}} = 0 \quad T_W = 0 \quad (10.6)$$

Also folgt in diesem Fall für die kinetische Energie

$$T = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} \right)^2 = T_{\text{rot}} \quad (10.7)$$

Achtung Für die kinetische Energie eines starren Körpers ist **immer** die Geschwindigkeit im Inertialsystem erforderlich; im **körperfesten** System verschwindet die kinetische Energie **immer!**

10.2.1 Zur Rotationsenergie

Man betrachte die körperfesten Koordinaten

$$\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}) \quad (10.8)$$

Die körperfeste Winkelgeschwindigkeit ist in diesem Fall dann

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (10.9)$$

Für das Quadrat eines allgemeinen Kreuzproduktes gilt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a_i \cdot a_i \cdot b_j \cdot b_j - a_i \cdot b_i \cdot a_j \cdot b_j \quad (10.10)$$

Im Zusammenhang mit der verkürzten Schreibweise von Kreuz- oder Skalarprodukten wird Einstein'sche Summenkonvention gebraucht, welche sagt, dass über doppelt auftretende (lateinische) Indizes immer summiert wird. Wird die Einstein'sche Summenkonvention angewandt, werden also einfach alle Summenzeichen, die man sonst ausschriebe, weggelassen.

Damit folgt für T_{rot}

$$T_{\text{rot}} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\omega_i \omega_j x_{\alpha j} x_{\alpha j} - \omega_i x_{\alpha i} \omega_j x_{\alpha j} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_{\alpha} \omega_i \omega_j \left(x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right)$$

10.2.2 Definition des Trägheitstensors

Der sogenannte Trägheitstensor ist definiert als

$$\mathcal{I}_{ij} := \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right) \quad (10.11)$$

10 Der starre Körper

Die Rotationsenergie der Bewegung lässt sich bequem mit dem Trägheitstensor (siehe 10.11) darstellen

$$\frac{1}{2} \mathcal{I}_{ij} \omega_i \omega_j \quad (10.12)$$

In vektorieller Schreibweise sieht die Beziehung folgendermaßen aus

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} \quad (10.13)$$

$\boldsymbol{\omega}$ ist dabei die körperfeste Winkelgeschwindigkeit.

Bei der Drehung eines starren Körpers um eine körperfeste Achse gilt für $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

und für die Rotationsenergie des starren Körpers gilt damit

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2 \quad (10.15)$$

Matrixschreibweise des Trägheitstensors

$$\mathcal{I} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} = \begin{pmatrix} y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -x_{\alpha} y_{\alpha} & -x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -y_{\alpha} x_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -z_{\alpha} y_{\alpha} \\ -z_{\alpha} x_{\alpha} & -z_{\alpha} y_{\alpha} & y_{\alpha}^2 + x_{\alpha}^2 \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

Die Diagonalelemente des Trägheitstensors sind die „Trägheitsmomente“, die Nicht-Diagonalelemente sind die sogenannten „Deviationsmomente“.

Im Kontinuum gilt für den Trägheitstensor

$$\mathcal{I}_{ij} := \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left(x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j \right) \quad (10.17)$$

wobei 10.17 ein Volumenintegral, d^3x das infinitesimale Volumenelement ist und $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ gilt.

10.2.3 Kinetische Energie eines rollenden Zylinders

3 Fälle für den Koordinatenursprung des körperfesten Koordinatensystems

Fall 1) $\mathbf{v}_A = 0$, die momentane Drehung ohne Translation um A.

$$T = \frac{I_A}{2} \omega^2 \stackrel{\text{Steinerscher Satz}}{=} \frac{\mathbf{I}_S + mr^2}{2} \omega^2 = \frac{\mathbf{I}_S}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} (\omega r)^2 \quad (10.18)$$

Fall 2)

$$\mathbf{v}_S = \omega r \longrightarrow T = \frac{1}{2} \mathbf{v}_S^2 + \frac{I_S}{2} \omega^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 + \frac{I_S}{2} \omega^2 \quad (10.19)$$

Fall 3)

$$\mathbf{v}_B = 2\omega r \quad \text{und } T_W \text{ tritt auf: } \mathbf{r}_{BS} := \frac{\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha}} \quad (10.20)$$

Damit folgt dann für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 + \frac{\mathbf{I}_B}{2} \omega^2 + (\mathbf{r}_B \omega \omega) \cdot m \mathbf{r}_{BS} = \dots \quad (10.21)$$

Der Trägheitstensor ist symmetrisch ($\mathbf{I}_{ij} = \mathbf{I}_{ji}$), deshalb ist er Diagonalisierbar.

$$\exists O \in SO(3) \quad \mathbf{O}^T \mathbf{I} \mathbf{O} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

Das bedeutet I kann durch geeignete Drehung des Koordinatensystems auf Diagonalform gebracht werden. Die Achsen im Koordinatensystem, in dem I diagonal ist, heißen Hauptträgheitsachsen. Die Diagonalelemente I_1, I_2, I_3 bzw. I_x, I_y, I_z heißen dann Hauptträgheitsmomente.

Bemerkungen Durch jeden Punkt des starren Körpers gehen 3 Hauptträgheitsachsen. Die Bestimmung der Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt ist bei symmetrischen Körpern einfach, denn sie müssen durch die Symmetrieachsen verlaufen und orthogonal zueinander sein. Als Beispiel betrachte man einen Quader

- Bild einfügen -

Im Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen gilt für die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right) \quad (10.23)$$

10.2.4 Rotierender Quader

Man betrachte einen rotierenden Quader mit Rotation $\dot{\alpha}$ um Hauptträgheitsachse $\parallel x$ und Rotation $\dot{\beta}$ um Hauptträgheitsachse 1-2-Achse $\perp x$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_x \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(I_y \sin^2(\alpha) + I_z \cos^2(\alpha) \right) \cdot \dot{\beta}^2 \quad (10.24)$$

10.3 Zur Nomenklatur

Ein starrer Körper heißt Rotator, wenn seine Bewegung einen Freiheitsgrad hat und seine Massepunkte nur auf einer Achse liegen, wenn also gilt $I_1 = I_2, I_3 = 0$.

Ein starrer Körper heißt Kreisel, der unsymmetrisch ist, wenn gilt $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ und symmetrisch ist und symmetrisch, wenn zwei Hauptträgheitsmomente identisch sind.

Bei einem Kugelkreisel gilt $I_1 = I_2 = I_3$.

Eigenvektoren des Diagonalisierten Trägheitstensors entsprechen den Hauptträgheitsachsen.

10.4 Der Drehimpuls

Der Gesamtträgheitsimpuls eines n -Teilchensystems ist definiert als die Summe der Teildrehimpulse, also

$$\mathbf{L}_{\text{Ges}} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{r}_{I\alpha} \times \mathbf{v}_{I\alpha} \quad (10.25)$$

Fürs Inertialsystem lassen sich folgende Beziehungen ausmachen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{I\alpha} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{\alpha} \\ \mathbf{v}_{I\alpha} &= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} \end{aligned}$$

Dabei entspricht \mathbf{r}_0 dem Ortsvektor im körperfesten Bezugssystem, \mathbf{r}_{α} den Ortsvektoren der Massepunkte im körperfesten Bezugssystem und \mathbf{v}_0 der Geschwindigkeit im körperfesten Koordinatenursprungs.

10 Der starre Körper

Es ergibt sich nun

$$m \cdot \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \right) \times \mathbf{v}_0 + \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} \right)$$

Nun gilt es 2 Fälle zu unterscheiden:

Fall 1) Der starre Körper wird in keinem Punkt festgehalten, also muss gelten

$$\mathbf{0} = \mathbf{S} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_S \quad , \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_S \quad , \quad \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{0} \quad (10.26)$$

Fall 2) Der starre Körper wird in mindestens einem Punkt festgehalten

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}_I = \mathbf{S} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad (10.27)$$

Damit ergibt sich für den Gesamtimpuls

$$\mathbf{L}_{\text{Ges}} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha} \right) \quad (10.28)$$

Mit der Identität

$$\left[\mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right]_i = \omega_j \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right) - x_i \cdot \left(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 \right) \quad (10.29)$$

Ergibt sich für den Drehimpuls der i -ten Komponente (im körperfesten Bezugssystem)

$$L_i = \mathcal{I}_{ij} \omega_j \quad (10.30)$$

und damit für den Gesamtdrehimpuls

$$\mathbf{L} = \mathcal{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (10.31)$$

Allerdings ist hier Vorsicht geboten, im allgemeinen gilt $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\omega}$.

10.4.1 Der kräftefreie Kreisel

Ein Kreisel ist ein rotierender starrer Körper, der sich nicht um eine raumfeste Achse dreht; täte er das, so nannten wir ihn Rotor.

Der Kreisel sei im Schwerpunkt festgehalten, die Gravitationskraft erzeugt also kein Drehmoment. Mit dem Drehimpulssatz folgt also

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}\mathbf{L} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{L} = \text{const.} \quad (10.32)$$

Die z-Achse muss also die Rotationsachse sein, damit die Gravitation kein Drehmoment bewirken kann.

Bemerkung Bei einem Kugelkreisel ist der Trägheitstensor bereits diagonalisiert und einfach ein vielfaches der Einheitsmatrix.

Fall 1) für den kräftefreien Kreisel

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &\parallel z - \text{Achse} \\ \rightarrow L_x &= L_y = 0 \\ \omega^2 &= \frac{|\mathbf{L}|}{I_z} \end{aligned}$$

Fall 2) für den kräftefreien Kreisel

$$\mathbf{L} \nparallel z - \text{Achse}$$

- Bild Kuypers S. 187 8.Auflage, 192 9.Auflage -

$$\tilde{\mathbf{r}} = r \cdot \mathbf{e}_z$$

sei ein Punkt auf der z-Achse. Dieser Punkt habe nun eine Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} = \left(\boldsymbol{\omega}_{\text{Parallel}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{Symm}} \right) \times \tilde{\mathbf{r}} \\ &= \boldsymbol{\omega}_{\text{Parallel}} \times \tilde{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Bei dieser Beziehung ist zu beachten, dass $\boldsymbol{\omega}_{\text{Symm}} \parallel \tilde{\mathbf{r}}$ gilt.

10 Der starre Körper

- Bild Kuypers siehe oben -

Nun muss gelten

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{L} \quad \text{da } \boldsymbol{\omega}_{\text{Parallel}} \parallel \mathbf{L} \\ \text{und } \mathbf{v} \perp z - \text{Achse}$$

1) $\tilde{\mathbf{r}}$ vollführt eine Kreisbahn

2) Die Symmetrieachse z umläuft L auf einer Kreisbahn mit festem Öffnungswinkel θ . Dies nennt man „Nutation“ oder „reguläre Präzision“.

Für den Öffnungswinkel θ lässt sich formulieren

$$\sin(\theta) = \frac{\omega_x}{\omega_{\text{Präzision}}} = \frac{L_x}{L} \quad (10.33)$$

Also muss gelten

$$\omega_{\text{Präzision}} = \frac{\omega_x}{\sin(\theta)} = \frac{L_x}{I_x \cdot \sin(\theta)} = \frac{L}{I_x} \\ \omega_{\text{Symm}} = \omega_z - \omega_{\text{Präzision}} \cdot \cos(\theta) = \left(\frac{L}{I_z} - \frac{L}{I_x} \right) \cdot \cos(\theta) \\ \frac{L_z}{I_z} = \frac{L \cdot \cos(\theta)}{I_z} = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_z$$

Hauptachsensystem und Richtung des Drehimpulses

Für den Schwerpunkt des Systems muss gelten

$$\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (10.34)$$

Im Folgenden soll nun die Drehachse durch S bestimmt werden

$$\mathcal{I} = mr^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (10.35)$$

Also gilt für den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \mathcal{I} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33} \cdot \omega \end{pmatrix} \quad (10.36)$$

Erinnerung Der Schwerpunktsatz sagt

$$m\ddot{\mathbf{r}}_s = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \quad (10.37)$$

Der Drehimpulssatz lautet

$$\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \cdot \mathbf{r}_{l\alpha} \times \ddot{\mathbf{r}}_{l\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{r}_{l\alpha} \times \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} \quad (10.38)$$

Im Schwerpunktsystem gilt also

$$\dot{\mathbf{L}}_s = \mathbf{N}_s \quad (10.39)$$

10.4.2 Rollender Zylinder

- Abb ähnlich Rollender Zylinder Kap Generalisierte Koordinaten, allerdings an Zylinder noch Masse m angebracht, die über Rolle mit Zylinder verbunden ist -

Für die Kräfte im Aufbau gelten folgende Bezeichnungen

G	Gravitationskraft
F_N	Normalkraft
F_l	Fadenkraft
H	Haftreibung

Für die Bewegungsgleichungen muss also nun gelten

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_{1s} &= m_1 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - F_l - H \\ \dot{L}_s &= \frac{d}{dt} (I_s \omega) = I_s \dot{\omega} = N_s = R(H - F_l) \\ m_2 \ddot{h}_2 &= F_l - m_2 g \end{aligned}$$

10 Der starre Körper

Es bleiben also 5 Unbekannte, nämlich

$$x_{1s}, \varphi, h_2, F_l, H \quad (10.40)$$

Zwangsbedingungen sind nun

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{1s} &= R \cdot \ddot{\varphi} \\ \ddot{h}_2 &= 2\ddot{x}_{1s}\end{aligned}$$

Mit

$$I_s = \frac{m_1 \cdot R}{2} \quad \longrightarrow \quad \ddot{x}_{1s} = \frac{m_1 \cdot \sin(\alpha) - 2m_2}{\frac{3}{2}m_1 + 4m_2} \quad (10.41)$$

10.5 Drehimpulssatz im rotierenden, körperfesten Bezugssystem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt} \left(L_i \cdot \mathbf{e}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(I_{ij} \omega_j \cdot \mathbf{e}_i \right) \\ &= \mathcal{I}_{ij} \cdot \dot{\omega}_j \mathbf{e}_i + \mathcal{I}_{ij} \omega_j \dot{\mathbf{e}}_i\end{aligned}$$

Der erste Summand ist die körperfeste zeitableitung des Drehimpulses und wird in dieser Form vom mitrotierenden Beobachter wahrgenommen. Die folgende Gleichung heißt **Eulergleichung**

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathcal{I}_{ij} \dot{\omega}_j \cdot \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{I}_{ij} \omega_j \mathbf{e}_i \stackrel{!}{=} N_s \quad (10.42)$$

Wenn man nun die Annahme trifft, dass die körperfesten Achsen die Haupttransformationsachsen sind, so ergibt sich mit

$$L_i = I_i \cdot \omega_i \quad (10.43)$$

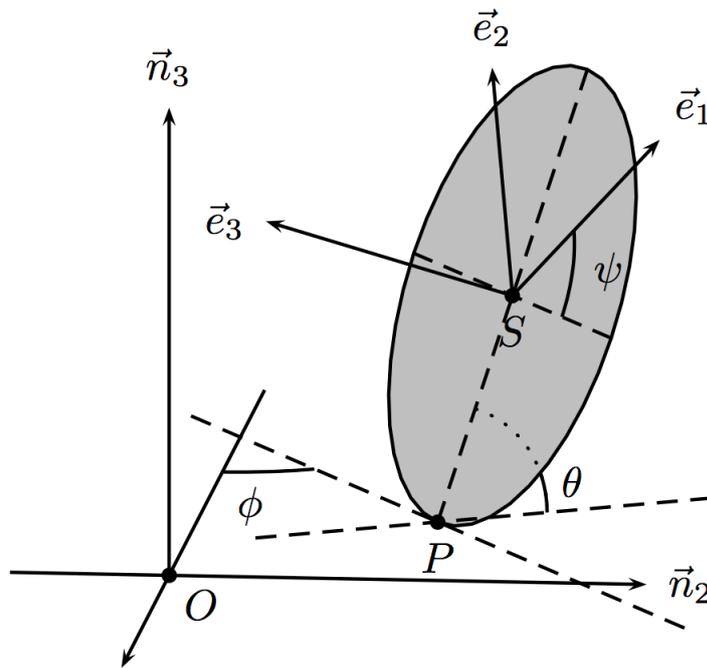
Für die angelegten Drehmomente folgt damit nach der Eulergleichung

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= N_3\end{aligned}$$

Die euler'schen Gleichungen bestimmen ausschließlich $\omega(t)$. Nun führen wir die euler'schen Winkel ein, die eine Orientierung des starren Körpers liefern.

Vergleiche z.B. Kuypers Auflage 9 S.206 - Euler'sche Winkel ab Seite 203

Drehungen 1-3 kommutieren nicht, die euler'schen Winkel θ, φ, ψ legen also die Orientierung des starren Körpers fest.



Die euler'schen Winkel eingezeichnet an der rollenden Kreisscheibe

Man bezeichnet die euler'schen Winkel auf oft folgendermaßen

ψ	Eigendrehung, Eigenrotationswinkel
θ	Nutationswinkel
φ	Präzessionswinkel

$e_{z/}$ hat folgende Gestalt im $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

$e_{\bar{z}}$ hat im Inertialsystem die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

Für Drehmatrizen (z.B. Drehmatrizen) gilt

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-1} = A^{\text{T}*}$$

Das erklärte Ziel ist also nun, die körperfeste Winkelgeschwindigkeit ω als Funktion der euler'schen Winkel darzustellen.

Es lässt sich die folgende Beziehung für ω ausmachen

$$\omega = \omega_{\varphi} + \omega_{\theta} + \omega_{\psi} \quad (10.46)$$

Es gilt erstens im $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ -Koordinatensystem für ω_{φ}

$$\omega_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \sin(\theta) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (10.47)$$

ω_{φ} hat also im x, y, z -Koordinatensystem die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \sin(\theta) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin(\psi) \cos(\theta) \\ \dot{\varphi} \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (10.48)$$

Es gilt zweitens ω_{θ} im $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.49)$$

Für ω_{θ} im x, y, z -Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \dot{\theta} \sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.50)$$

Es gilt drittens für ω_ψ im x, y, z -Koordinatensystem

$$\omega_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (10.51)$$

Damit folgt insgesamt für ω im x, y, z -Koordinatensystem

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \cos(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (10.52)$$

Es gibt also im körperfesten System einen Zusammenhang zwischen ω und den eulerschen Winkeln.

10.5.1 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad , \quad I_1 = I_2 \quad \dots \quad (10.53)$$

ω_3 ist also konstant.

Es gilt nun für Ω

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \quad (10.54)$$

Daraus ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

Als der allgemeine Lösung kann nun für beide Differentialgleichungen aufgestellt werden

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2(t) &= A \sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (10.55)$$

ω rotiert also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Figurenachse. Da auch die 3 Komponenten von ω fest sind, hat ω konstanten Betrag, rotiert also auch gleichmäßig um die Figurenachse.

Bemerkung Die Erde kann als symmetrischer, leicht abgeplatteter Kreisel mit

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = \frac{1}{300} \quad ; \quad \omega_3 \sim \omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}} \quad (10.56)$$

angenommen werden.

Für die Winkellage des Kreisels ergibt sich nun also

$$\begin{pmatrix} A \cos(\Omega t + \alpha) \\ A \sin(\Omega t + \alpha) \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Ansatz: $\theta(t) = \theta_0 = \text{const.}$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} I^2 + II^2 &\longrightarrow A^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta_0) \longrightarrow \sin(\theta_0) \dot{\varphi} = \pm A \\ \varphi(t) &= \pm \frac{A}{\sin(\theta_0)} t + \varphi_0 \\ \psi(t) &= -\Omega t - \alpha \pm \frac{\pi}{2} \\ \dot{\psi} &= -\Omega \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\omega_{\text{Prä}} = \dot{\varphi} = \frac{\pm A}{\sin(\theta_0)} \quad , \quad \omega_{\text{symm}} = \Omega = -\dot{\psi} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \quad (10.57)$$

10.5.2 Der geführte Kreisel

Vergleiche Kuypers

Man betrachte einen symmetrischen Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_{symm} . Nun suche man das Drehmoment \mathbf{N} , das zu Präzession mit $\omega_{\text{Prä}}$ bei Öffnungswinkel θ führt.

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega_{\text{Prä}} = \text{const.} \\ \dot{\psi} &= \omega_{\text{symm}} = \text{const.} \\ \dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\text{prä}} \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \omega_{\text{prä}} \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \omega_{\text{prä}} \cos(\theta) + \omega_{\text{symm}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \omega_{\text{prä}} \omega_{\text{symm}} \sin(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.58)$$

Nun stellen wir die Eulergleichungen auf

$$\begin{aligned} N_1 &= \omega_{\text{prä}} \sin(\theta) \\ N_2 &= -\omega_{\text{prä}} \sin(\theta) \sin(\psi) \left[I_3 \omega_{\text{symm}} + (I_3 - I_1) \omega_{\text{prä}} \right] \\ N_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{N} \propto \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $\mathbf{N} \parallel \overline{ON}$ mit $\overline{ON} = \text{Knotenlinie}$

$$\mathbf{N} = \left[I_3 + (I_3 - I_1) \frac{\omega_{\text{prä}}}{\omega_{\text{symm}}} \cos(\theta) \right] \left(\boldsymbol{\omega}_{\text{prä}} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{symm}} \right) \quad \text{für } \omega_{\text{prä}}, \omega_{\text{symm}}, \theta = \text{const.} \quad (10.59)$$

Es folgen einige Spezialfälle

... Spezialfälle nachtragen

10.6 Die Lagrangegleichung für den starren Körper

Man lege $\boldsymbol{\omega}$ fest als

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (10.60)$$

und setze $\boldsymbol{\omega}$ ein in T_{Rot}

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \mathcal{I}_{ij} \omega_i \omega_j = \boldsymbol{\omega}^T \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} \quad (10.61)$$

Die Rotationsenergie kann also nun als Funktion der eulerschen Winkel und deren Ableitungen dargestellt werden, für den Symmetrischen Kreisel - auch Lagrangekreisel gilt für die Hauptträgheitsmomente im Hauptachsensystem $I_1 = I_2$

$$T_{\text{Rot}} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right)^2 \quad (10.62)$$

10.7 Der schwere Kreisel

Bild im Kuypers nachgugge

Für das Potential $V(r)$ gilt nun

$$V = m \cdot g \cdot z = m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) \quad (10.63)$$

Die Lagrangegleichung für den schweren Kreisel hat nun die Form

$$\mathcal{L} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right)^2 - mgl \cos(\theta)$$

Auffallend ist, dass φ und ψ zyklisch sind, also dass es Erhaltungsgrößen im Problem geben muss. Die Winkel φ und ψ beschreiben die Drehung um die z_I -Achse und \bar{z} -Achse.

Es folgt die Bestimmung der Erhaltungsgrößen

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \left(\sin^2(\theta) \dot{\varphi} \right) + I_3 \left(\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right) \cos(\theta) = \text{const.} \quad (10.64)$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \left(\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right) = I_3 \omega_3 = \text{const.} \quad (10.65)$$

Das liefert 3 gekoppelte Lagrangegleichungen für φ, θ, ψ , das Problem ist also nicht analytisch lösbar. Allerdings ist $\theta(t)$ mit Hilfe der 3 Erhaltungsgrößen p_φ, p_ψ und E auf ein elliptisches Integral rückführbar.

Mit 10.64 und 10.65 folgt

$$p_\varphi - p_\psi \cos(\theta) = \dot{\varphi} I_1 \sin^2(\theta) \quad (10.66)$$

Damit folgt für $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta)}{I_1 \sin^2(\theta)} \quad (10.67)$$

Für $\dot{\psi}$ lässt sich ausmachen

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\varphi} \cos(\theta) = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta)}{I_1 \sin^2(\theta)} \quad (10.68)$$

Und für die Gesamtenergie E gilt

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right)^2 + mgl \cos(\theta) \\ &= \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos(\theta) \right)^2}{2I_1 \sin^2(\theta)} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos(\theta) \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

Wenn man nun substituiert $u := \cos(\theta)$ (und damit $\dot{\theta} \sin(\theta) = \dot{u}$), erhält man

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= \left[\frac{2I_3 E - p_\psi^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1} \right] (1 - u^2) - \left[\frac{p_\varphi - p_\psi u}{I_1} \right]^2 \\ &:= -2V_{\text{eff}}(u) \end{aligned}$$

Es folgt also nun für \dot{u}

$$\dot{u} = \pm \sqrt{-2V_{\text{eff}}(u)} \quad \longrightarrow \quad t - t_0 = \pm \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{-2V_{\text{eff}}(u')}} \quad (10.69)$$

Integrale dieser Form heißen **elliptische Integrale**. Das effektive Potential ermöglichte eine qualitative Diskussion der Bewegung

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + V_{\text{eff}}(u) = 0 =: E' \quad (10.70)$$

Bild für das effektive Potential des schweren Kreisels
Wahrscheinlich Kuypers

10 Der starre Körper

Das effektive Potential V_{eff} hat zwei Nullstellen $u_1, u_2 \in [-1, 1]$. Eine Nullstelle liegt bei $u > 1$. Die Visualisierung der Bewegung des Kreisels wird Locus der Figurenachse genannt, die Trajektorie des Locus kann mithilfe einer konzentrischen Kugel dargestellt werden, wobei der Nullpunkt der Kugel der Punkt sein muss, in dem der Kiesel festgehalten wird. Der Durchstoßpunkt der körperfesten Rotationsachse durch die Kugelschale beschreibt eine Trajektorie auf der Kugeloberfläche.

$$\dot{\varphi} = \frac{\overbrace{p_\varphi - p_\psi \cos(\theta)}^x}{I_1 \sin^2(\theta)} \quad (10.71)$$

Fall 1 - $x > 0$

Bildchen einfügen - Auflage 9 Kuypers S.214

Fall 2 - $x(\theta_1) > 0, x(\theta_2) < 0$

...

Fall 3 - $x(\theta_2) = 0$

Spitzen treten nur auf bei $\theta = \theta_2$ auf.

$$E(t=0) = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos(\theta)$$
$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi} \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{p_\psi^2}{2I_3} > 0$$

E_{pot} muss also abnehmen und θ größer werden.

Fall 4 - $\dot{\theta} = 0, \dot{\varphi} = 0$

θ ist offensichtlich konstant, es tritt reine Präzession auf (Bewegung auf „Breitengrad“ der konzentrischen Einheitskugel).

11 Lineare Schwingungen

11.1 Der harmonische Oszillator

Der freie, gedämpfte harmonische Oszillator wird allgemein beschrieben durch

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Dx = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{c}{2m} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad (11.1)$$

Es folgt also für die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11.2)$$

Eine erzwungene Schwingung bei einem harmonischen Oszillator bewirkt die Änderung der Form nach

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t) \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 > \gamma^2 \quad (11.3)$$

Es folgt in diesem Fall für die Bewegungsgleichung

$$x(t) = ae^{\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t + \alpha\right) + A \cos(\Omega t - \varphi) \quad (11.4)$$

Die Amplitude A ist proportional zur Anregungsamplitude. Es folgt für A

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\gamma^2\Omega^2}} \quad (11.5)$$

Phasenverschiebung φ lässt sich folgendermaßen mit weiteren Systemcharakteristika in Verbindung bringen

$$\tan(\varphi) = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (11.6)$$

$A(\Omega)$ Plot einfügen - Maximum der Funktion bei

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (11.7)$$

mit der Amplitude $A(\Omega_R)$

$$A(\Omega_R) = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (11.8)$$

11.2 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

Man betrachte mehrere „Schwinger“, deren Schwingungen aneinander gekoppelt seien. Man nennt eine solche Anordnung von Schwingern „Koppelschwinger“. Man kann nun wechselseitige Beeinflussungen betrachten, beispielsweise Schwebungen - Überlagerungen zweier Moden.

Seien N gekoppelte Oszillatoren in einer „unmittelbaren“ Umgebung des Gleichgewichts. Dadurch existieren „nahezu“ lineare Rückstellkräfte.

- a) Eventuelle Zwangsbedingung - holonom skleronom
- b) Keine Transformation auf ein ein bewegtes Bezugssystem
- c) Konservatives System, also keine dissipativen Kräfte wie z.B. Reibung

Aus a) und b) folgt für die kinetische Energie, dass sie eine homogene quadratische Form der $3N - k =: n$ generalisierten Geschwindigkeiten ist. Für T folgt also

$$T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad T_{ij} = T_{ij}(q_1, \dots, q_n) \quad (11.9)$$

q_0 sei die Gleichgewichtslage des Systems, das heißt q_0 ist ein (relatives) Minimum des Potentials $V(q)$

$$\left. \nabla V \right|_{q=q_0} = 0$$

$$\left(\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_0} \right)$$

Die Hessematrix ist also positiv-definit (Kein Sattelpunkt oder ähnlicher entarteter Punkt sondern Maximum).

11 Lineare Schwingungen

Damit ergibt sich also

$$T_{ij}(q) = T_{ij}(q_0) + \sum_{l=1}^n \left. \frac{\partial T_{ij}}{\partial q_l} \right|_0 q_l \dots$$

$$\text{und } V(q) = V(q_0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 q_i q_j + \dots$$

Es folgt also nun für die Lagrangefunktion der Koppelschwinger

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \sum_{i,j=1}^n \left[T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V_{ij} q_i q_j \right] + \mathcal{O}(q^3) \quad (11.10)$$

Für kleine Schwingungen hat die Lagrangefunktion in generalisierten Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \sum_{i=1}^n \left(T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V_{ij} q_i q_j \right) \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \underline{T} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \underline{V} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (11.11)$$

In kartesischen Koordinaten hat \underline{T} die Form

$$\underline{T} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) \quad (11.12)$$

$\underline{T}, \underline{V}$ sind symmetrische $n \times n$ Matrizen, außerdem sind sie positiv definit, was aus der physikalischen Bedeutung klar wird.

Die Bewegungsgleichung hat also die Form

$$\sum_{j=1}^n \left(T_{ij} \ddot{q}_j + V_{ij} q_j \right) = 0 \quad (11.13)$$

Der nun gewählte Ansatz zur Lösung der Bewegungsgleichung soll aussehen wie folgt

$$q_j(t) = C a_j e^{i(\omega t - \delta)} \quad j = 1, \dots, n \quad (11.14)$$

oder

$$q_j(t) = C a_j \cos(\omega t - \delta) \quad (11.15)$$

11 Lineare Schwingungen

Nach Einsetzen in 11.13 liefert nun

$$\sum_{j=1}^n \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0 \quad (11.16)$$

$$\text{bzw. } \left(\underline{\underline{V}} - \omega^2 \underline{\underline{T}} \right) \mathbf{a} = 0 \quad (11.17)$$

Für das Koppelschwingerproblem gibt es nur eine nicht-triviale Lösung \mathbf{a} , wenn gilt

$$\det \left(\underline{\underline{V}} - \omega^2 \underline{\underline{T}} \right) = 0 \quad (11.18)$$

Die charakteristische Gleichung (charakteristisches Polynom) oder auch Sekulärgleichung ist im allgemeinen vom Grad n in ω^2 und liefert meistens n verschiedene reelle, positive Nullstellen $\omega_1, \dots, \omega_n$, die sogenannten Eigenfrequenzen.

Bemerkung Eine Entartung der Eigenfrequenzen tritt auf, wenn nicht alle ω_i verschieden voneinander sind, allerdings wird die Entartung an dieser Stelle nicht behandelt werden. Die Positivität von $\underline{\underline{V}}$ und $\underline{\underline{T}}$ garantiert $\omega_i^2 > 0$. Für den nicht entarteten Fall, der hier behandelt wird, bedeutet das, dass es n Eigenvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ geben muss. Wobei die Amplitudenverhältnisse a_{1r}, \dots, a_{nr} der r -ten Eigenschwingung.

Es gilt also nun

$$q_{jr}(t) = C_r a_{jr} \cos(\omega_r t - \delta_r) \quad j = 1, \dots, n \quad (11.19)$$

$$\text{bzw. } q_r(t) = C_r \mathbf{a}_r \cos(\omega_r t - \delta_r) \quad \text{mit } C_r, \delta_r \text{ Integrationskonstanten und } r = 1, \dots, n \quad (11.20)$$

11.20 beschreibt die Fundamental- oder auch Normalschwingungen. Dabei schwingen alle Freiheitsgrade mit einer Frequenz ω_r .

Die allgemeine Lösung der Fundamentalschwingung hat nun die Form

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{r=1}^n C_r \mathbf{a}_r \cos(\omega t - \delta_r) \quad (11.21)$$

11.2.1 Gekoppelte Oszillatoren

MMP Blatt 6 - Skizze ähnlich einfügen

Die Bewegungsgleichung für 2 gekoppelte Oszillatoren hat nun die Form

$$m\ddot{q}_1 + (D + D_{12})q_1 - D_{12}q_2 = 0 \quad (11.22)$$

$$m\ddot{q}_2 + (D + D_{12})q_2 - D_{12}q_1 = 0 \quad (11.23)$$

Ansatz

$$q_i(t) = C a_j \cos(\omega t - \delta) \quad i = 1, 2 \quad (11.24)$$

$$\begin{pmatrix} D + D_{12} - m\omega^2 & -D_{12} \\ -D_{12} & D + D_{12} - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.25)$$

Es gilt nun

$$\begin{vmatrix} D + D_{12} - m\omega^2 & -D_{12} \\ -D_{12} & D + D_{12} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Die Eigenfrequenzen sind nun

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D_{12}}{m}}$$

Einsetzen von 11.2.1 in 11.25 liefert

$$a_{11} = a_{12}$$

Anschaulich bedeutet das, dass die beiden Massen mit konstantem Abstand schwingen. Außerdem lässt sich für die Frequenzen ausmachen

$$\dots \omega_2^2 = \frac{D + 2D_{12}}{m} \dots \rightarrow a_{12} = -a_{22} \quad (11.26)$$

Die beiden Massen schwingen also mit der gleichen Amplitude genau gegenphasig.

Die allgemeine Lösung für den gekoppelten Doppelschwinger sieht also nun aus wie folgt

$$\mathbf{q}(t) = C_1 \cos(\omega t - \delta_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (11.27)$$

11 Lineare Schwingungen

Mit den Anfangsbedingungen

$$q_1(0) = A \quad , \quad q_2(0) = 0 \quad , \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0 \quad (11.28)$$

ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{A}{2} \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \right) = A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \\ q_2(t) &= \frac{A}{2} \left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) \right) = A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{aligned}$$

Für $D_{12} \ll D$ gilt $\omega_1 \sim \omega_2$. In diesem Fall schwingen beide Oszillatoren mit jeweils $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und langsam veränderlicher Amplitude

$$A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \quad \text{bzw.} \quad A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \quad (11.29)$$

wobei für die Schwebungsdauer T_S gilt

$$T_S = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (11.30)$$

Bei ungleichen Massen und Federkonstanten tritt eine **unreine** Schwebung auf, wobei die Amplitude nicht mehr auf 0 abfällt.

Hauptachsentransformation Aus 11.16 folgt

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Omega}}^2 \quad (11.31)$$

wobei $\underline{\underline{A}} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ eine symmetrische $n \times n$ Matrix ist und $\underline{\underline{\Omega}}^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{V}} \mathbf{a}_r &= \omega_r^2 \underline{\underline{T}} \mathbf{a}_r \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a}_s^T \underline{\underline{V}} \mathbf{a}_r = \omega_r^2 \mathbf{a}_s^T \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_r \underline{\underline{V}} \mathbf{a}_s &= \omega_s^2 \mathbf{a}_r^T \underline{\underline{T}} \mathbf{a}_s \\ &\quad \text{mit } \mathbf{a}_s^T \underline{\underline{T}} \mathbf{a}_r \text{ da } \underline{\underline{T}} \text{ symmetrisch} \end{aligned}$$

Rechnungen nachtragen ...

und es gilt für $q = q_r$ $0 < \dot{q}_r^T \underline{\underline{T}} \dot{q}_r = C_r^2 \omega_r^2 \sin^2(\omega_r t - \delta_r) \cdot \mathbf{a}_r^T \underline{\underline{T}} \mathbf{a}_r$, woraus folgt

$$\mathbf{a}_r^T \underline{\underline{T}} \mathbf{a}_r > 0 \quad (11.32)$$

11 Lineare Schwingungen

Aus 11.32 folgt, dass C_r und \mathbf{a}_r so gewählt werden können, dass gilt

$$\mathbf{a}_r^T \underline{\underline{T}} \mathbf{a}_r = \mathbf{1} \quad (11.33)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} A^T T A &= \mathbf{1} \\ \text{und mit 11.31 } A^T V A &= A^T T A \Omega^2 = \Omega^2 \end{aligned}$$

Es folgt die Transformation auf die Hauptachsenkoordinaten, für die gilt

$$\mathbf{q} = \underline{\underline{A}} \mathbf{Q} \quad (11.34)$$

Damit folgt für die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \underline{\underline{T}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \underline{\underline{V}} \mathbf{q} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}^T \underline{\underline{T}} A \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} A^T V A \mathbf{Q} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}^T - \mathbf{Q}^T \Omega^2 \mathbf{Q} \\ \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) &= \sum_{r=1}^n \left(\dot{Q}_r^2 - \omega_r^2 Q_r^2 \right) \end{aligned}$$

Für die Bewegungsgleichungen gilt nun

$$\ddot{Q}_r + \omega_r^2 Q_r = 0 \quad \forall r = 1, \dots, n \quad (11.35)$$

11.2.2 Hauptachsentransformation für 2 gekoppelte harmonische Oszillatoren

$$\underline{\underline{T}} \ddot{\mathbf{q}} + \underline{\underline{V}} \mathbf{q} = 0 \quad \text{mit } \underline{\underline{T}} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} D + D_{12} & -D_{12} \\ -D_{12} & D + D_{12} \end{pmatrix}$$

Definition

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$A^T T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T V A = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D_2 D_{12} \end{pmatrix}$$

Hauptkoordinatensystem

$$q = A Q = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} Q_1 + Q_2 \\ Q_1 - Q_2 \end{pmatrix} \quad (11.36)$$

Damit folgt für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0, \quad \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0 \quad (11.37)$$

mit $\omega_1^2 = \frac{D}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{D+2D_{12}}{m}$.

11.3 Die erzwungene Schwingung

Skizze einfügen

Wand - Feder - Masse - Feder (D_{12}) - Masse - Feder - Wand

Die Auslenkungen der beiden Massen bezeichnen wir von links nach rechts mit q_1 und q_2 . Die Bewegungsgleichungen der schwingenden, gekoppelten Massen lauten

$$m\ddot{q}_1 = -Dq_1 + D_{12}(q_2 - q_1) + F_0 \cos(\Omega t) \quad (11.38)$$

$$m\ddot{q}_2 = -Dq_2 - D_{12}(q_2 - q_1) \quad (11.39)$$

Nach Einschwingvorgang Stationäres Verhalten mit Frequenz der Anregung $A \cos(\Omega t)$.

Ansatz

$$q_i(t) = A_i \cos(\Omega t) \quad (11.40)$$

Definitionen

$$\omega_1^2 = \frac{D}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{D + 2D_{12}}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{D + D_{12}}{m} \quad (11.41)$$

11 Lineare Schwingungen

Durch Einsetzen des Ansatzes erhält man

$$\left(\omega_3^2 - \Omega^2\right)A_1 - \frac{D_{12}}{m}A_2 = \frac{F_0}{m} \quad (11.42)$$

$$-\frac{D_{12}}{m}A_1 + \left(\omega_3^2 - \Omega^2\right)A_2 = 0 \quad (11.43)$$

Das führt auf die Lösung

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_3^2 - \Omega^2}{\left(\omega_3^2 - \Omega^2\right)^2 - \left(\frac{D_{12}}{m}\right)^2} \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_3^2 - \Omega^2}{\left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)} \\ A_2 &= \frac{F_0}{m} \frac{\frac{D_{12}}{m}}{\left(\omega_3^2 - \Omega^2\right)^2 - \left(\frac{D_{12}}{m}\right)^2} \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\left(\omega_1^2 - \Omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \Omega^2\right)} \end{aligned}$$

- Graph einfügen -

Konstanten A_1, A_2 auf y -Achse, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ wobei ω_3 von ω_1 und ω_2 eingeschlossen wird, als Polstellen auf der x -Achse, auf der Ω aufgetragen wird von $-\infty - \omega_1$ von $0 - \infty$, von $\omega_1 - \omega_3$ von $-\infty - \infty$ und ab ω_3 von $\infty - 0$

$$A_1(\Omega = \omega_3) = 0$$

$$A_2(\Omega = \omega_3) = -\frac{F_0}{D_{12}}$$

Die rechte Masse muss also genau in Gegenphase zur ersten Schwingen um die periodischen Kräfte die auf die linke Masse wirken ausgleichen zu können.

Für den gedämpften Fall werden aus den Polstellen Maxima bzw. Minima zwischen denen sich die Funktion $A(\Omega)$ bewegt.

11.4 Übergang zum schwingenden Kontinuum

Beim Übergang zum Schwingenden Kontinuum betrachtet man n Massen mit $n \rightarrow \infty$ und die Abstände der Schwinger werden bezeichnet durch l_0 mit $l_0 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} l_0 &\rightarrow 0/l && = (n+1) \cdot l_0 \\ m &\rightarrow 0 \frac{m}{l_0} && =: \rho = \text{const.}, \rho \text{ ist die Massenbeschleunigungsdichte} \\ D &\rightarrow \infty D \cdot l_0 && = \text{const.} \end{aligned}$$

- Skizze einfügen -
analog zu Skizze oben, allerdings sehr lange Feder-Masse Kette

Die Gesamtlänge der Oszillatorkette werde mit l bezeichnet. Zunächst werde ein Kettenschwinger mit $n = 3$ Massen betrachtet. Skizze analog Beschreibung oben - Immer selbe Federkonstante D für alle Federn

Longitudinale Schwingung:

$$m\ddot{q}_j - D(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) = 0 \quad \text{mit } j = 1, 2, 3 \text{ und } q_0 = q_t = 0 \quad \forall t$$

Transversale Auslenkung

- Skizze ähnlich Skript-

$$\tan(\alpha) = \frac{q_{j+1} - q_j}{l_0}$$

Man definiert nun

$$\begin{aligned} F &= \text{Kraft von } m_{j+1} \text{ auf } m_j \\ F \tan(\alpha) &= \text{Kraft von } M_{j+1} \text{ auf } m_j \text{ in vertikaler Richtung} \\ F \tan(\alpha) &\sim F \sin(\alpha) \text{ für kleine } \alpha \end{aligned}$$

In erster Näherung gilt nun

$$m\ddot{q}_j - \frac{F}{l_0} (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) = 0 \quad (11.44)$$

11 Lineare Schwingungen

Ansatz

$$q_j(t) = C a_j \cos(\omega t - \delta) \quad (11.45)$$

Das führt auf

$$\begin{pmatrix} 2D - m\omega^2 & -D & 0 \\ -D & 2D - m\omega^2 & -D \\ 0 & -D & 2D - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.46)$$

Nun wird die Seklärgleichung aufgestellt und Lösungen für die ω_i aufgestellt

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= (2 - \sqrt{2}) \frac{D}{m} & \text{mit } \mathbf{a}^T &= (1, \sqrt{2}, 1) \\ \omega_2^2 &= 2 \frac{D}{m} & \text{mit } \mathbf{a}^T &= (1, 0, -1) \\ \omega_3^2 &= (2 + \sqrt{2}) \frac{D}{m} & \text{mit } \mathbf{a}^T &= (1, -\sqrt{2}, 1) \end{aligned}$$

11.4.1 Allgemein für n Massen

$$m\ddot{q}_j - D(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) = 0 \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, n \quad q_0 = q_{n+1} = 0 \forall t$$

Ansatz

$$q_j(t) = C a_j \cos(\omega t - \delta) \quad \text{mit Ansatz } a_j = \sin(\alpha j) \quad (11.47)$$

Randbedingungen $\sin(n+1)\alpha = 0$

Es folgt also eine Konkretisierung der Randbedingungen mit

$$(n+1)\alpha = \pi r \quad \text{wobei } \alpha = \frac{\pi r}{n+1} \text{ mit } r = 1, 2, \dots, n \quad (11.48)$$

Zur Überprüfung soll nun der Ansatz eingesetzt werden

$$\left\{ -m\omega^2 + 2D \left(1 - \cos \left(\frac{\pi r}{n+1} \right) \right) \right\} C \sin(\alpha j) = 0$$

Von: $\sin(\alpha j) - 2 \sin(\alpha j) + \sin(\alpha(j+1))$

11 Lineare Schwingungen

Damit folgt also

$$\sin(\alpha_j) \left(\cos(\alpha) - 2 + \cos(\alpha) \right) + \cos(\alpha_j) \left(\sin(\alpha) - \sin(\alpha) \right) = -2 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi r}{n+1} \right) \right) \quad (11.49)$$

Damit folgt also für ω_2

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2D}{m} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi r}{n+1} \right) \right) \\ &= \frac{4D}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi r}{2(n+1)} \right) \end{aligned}$$

Also folgt für ω_r

$$\omega_r = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi r}{n+1} \right) \quad (11.50)$$

und für a_{jr}

$$a_{jr} = \sin \left(\frac{\pi r}{n+1} j \right) \quad \text{wobei } a_{jr} \text{ die Amplitudenvektoren der Eigenschwingungen sind} \quad (11.51)$$

Validierung mit einfachem Spezialfall

$$n = 1 \longrightarrow \omega = \frac{2}{\omega_0}, \quad n = 2, n = 3 \text{ wie gehabt} \quad (11.52)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun durch Superposition der einzelnen Lösungen und hat die Form

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^n C_r \sin \left(\frac{\pi r}{n+1} j \right) \cdot \left(d_r \cos(\omega_r t) + e_r \sin(\omega_r t) \right) \quad (11.53)$$

d_r, e_r ergeben sich dabei aus den Anfangsbedingungen $q_j(0), \dot{q}_j(0)$.

11 Lineare Schwingungen

Wegen der Orthogonalität lässt sich das ganze im Kontinuum ausdrücken mit

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sin\left(\frac{\pi r}{n+1}j\right) \sin\left(\frac{\pi S}{n+1}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} \delta_{rs} \end{aligned}$$

Wobei δ hier das Kroneckerdelta ist (!). Mit diesem Schritt folgt nun durch Multiplikation von

$$q_j(0) = \sum_{j=1}^n dr \sin\left(\frac{\pi r}{n+1}j\right)$$

mit

$$\sin\left(\frac{\pi S}{n+1}j\right)$$

und anschließender Summation über alle j

$$\begin{aligned} dS &= \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n q_j(0) \sin\left(\frac{\pi S}{n+1}j\right) \\ e_s &= \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \dot{q}_j(0) \sin\left(\frac{\pi S}{n+1}j\right) \end{aligned}$$

11.5 Übergang zum Kontinuum

Mit (Stern - Erste Gleichung allgemein für n Massen) folgt

$$\frac{m}{Dl_0^2} \ddot{q}_j = \frac{q_{j-1}(t) - 2q_j(t) + q_{j+1}(t)}{l_0^2} \quad (11.54)$$

Für $l_0 \rightarrow 0$ ersetze Index j durch Koordinate x und Auslenkung $q_j(t)$ durch $\psi(x, t)$, wobei $x = jl_0$. Es folgt also daraus

$$\frac{m}{Dl_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = \frac{\psi(x - l_0, t) - 2\psi(x, t) + \psi(x + l_0, t)}{l_0^2} \xrightarrow{l_0 \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (11.55)$$

11 Lineare Schwingungen

Dabei gilt

$$\frac{m}{Dl_0^2} = \frac{\rho}{Dl_0} =: \frac{1}{c^2} \quad (11.56)$$

da $\frac{\rho}{Dl_0^2}$ die Dimension einer Geschwindigkeit⁻¹ hat.

Es folgt also nun

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (11.57)$$

Dabei ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle.

Für Longitudinalwellen gilt also dann für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{EA}{\rho}} \quad (11.58)$$

wobei sich für die Bestandteile ausmachen lässt

E = Elastizitätsmodul , A = Querschnitt

Für Transversalwellen lässt sich ausmachen

$$D = \frac{F}{l_0} \quad (11.59)$$

wobei gilt

F = spannende Kraft , ρ = lineare Massebelegung

Also gilt bei Transversalwellen für c

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (11.60)$$

11.6 Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Die eindimensionale Wellengleichung hat die Form

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (11.61)$$

Es gibt nun 2 verschiedene Möglichkeiten, die allgemeine Wellengleichung zu lösen.

11.6.1 Die d'Alembertsche Lösung

Die d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung hat die Form

$$\psi(x, t) = f(x \pm ct) \quad (11.62)$$

wobei f eine beliebige Funktion ist. Auch fortschreitende Wellen lassen sich mit diesem Prinzip lösen, allerdings gibt die Lösung keinen Aufschluss über das Spektrum der Schwingung oder gar die Eigenschwingungen.

11.6.2 Die Bernoulli'sche Lösung

Die Lösung nach Bernoulli hat die Form

$$\psi(x, t) = g(x) \cdot h(t) \quad (11.63)$$

Diese Lösung liefert nur stehende Wellen.

Das Einsetzen der Bernoulli'schen Lösung in die Wellengleichung ergibt nun also

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} g \ddot{h} &= g'' h \\ \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} &= \frac{g''(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

nur von t abhängig nur von x abhängig

Die linke- und die rechte Seite müssen also beide konstant sein, es werde nun $-k^2$ als diese Konstante definiert. Das führt auf

$$\ddot{h} = -k^2 c^2 h \quad \text{und} \quad g'' = -k^2 g$$

Die Lösung dazu lautet

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1 \cos(kct) + h_2 \sin(kct) \\ g(x) &= g_1 \cos(kx) + g_2 \sin(kx) \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen folgen unmittelbar aus dem Kontinuumsgrenzwert des Ketten-schwingers

$$\frac{\pi r}{n+1} j \stackrel{!}{=} \frac{r\pi}{(n+1)l_0} j l_0 = \frac{r\pi}{l} \cdot x \quad (11.64)$$

Beide Ränder des schwingenden Mediums werden festgehalten

Randbedingungen:

$$g(0) = g(l) = 0$$

$$g_1 = 0 \quad , \quad k = r \frac{\pi}{l} =: k_r \quad \text{mit } r = 1, 2, \dots$$

$$\omega_r = k_r c = \frac{r\pi c}{l} \quad \text{mit } r = 1, 2, \dots$$

Es gibt also unendlich viele Eigenfrequenzen im Kontinuum, mit den Randbedingungen ergeben sich nur diskrete Eigenfrequenzen. Der Zusammenhang zwischen ω und k wird Dispersionsrelation genannt.

Die partiellen Lösungen lauten dann also

$$\psi_r(x, t) = \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right) \left\{ d_r \cos(\omega_r t) + e_r \sin(\omega_r t) \right\}$$

Die Lösungen der Wellengleichung werden auch die Eigenschwingungen oder Eigenfunktionen der Wellengleichung genannt; sie sind immer stehende Wellen mit einer Amplitude, die proportional zu $\sin\left(\frac{\pi r x}{l}\right)$ ist. Die Knoten der stehenden Wellen liegen an den Orten $0, \frac{l}{r}, \frac{2l}{r}, \dots, l$. Anschaulich sind Knoten die Stellen der Schwingung, an denen die Amplitude immer 0 ist.

- Skizze zu Grund- und Oberschwingungen -

11.6.3 Allgemeine Lösung der linearen Wellengleichung

Durch die Superposition der einzelnen Lösungen erhält man als allgemeine Lösung

$$\psi(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right) \left\{ d_r \cos(\omega_r t) + e_r \sin(\omega_r t) \right\} \quad (11.65)$$

Die Lösung ist in der Zeit periodisch, da die Obertöne ($\omega_r, r \geq 2$) ganzzahlige Vielfache des Grundtons $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \cdot c$ sind. Das steht im Gegensatz zum Kettenschwinger, wo die Frequenzen deutlich komplizierter untereinander im Verhältnis zueinander stehen.

11 Lineare Schwingungen

d_r, e_r werden nun durch die Anfangsbedingungen ausgedrückt

$$\begin{aligned}\psi(x, 0) &= \sum_{r=1}^{\infty} d_r \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right) \\ \dot{\psi}(x, 0) &= \sum_{r=1}^{\infty} \omega_r e_r \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right)\end{aligned}$$

Wenn man nun mit $\sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right)$ multipliziert, anschließend über x integriert und die Orthogonalitätsrelation ausnutzt, erhält man

$$\int_0^l dx \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{s\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2} \delta_{rs} \quad (11.66)$$

Es folgt also nun für d_s

$$d_s = \frac{2}{l} \int_0^l dx \psi(x, 0) \sin\left(\frac{s\pi x}{l}\right) \quad \text{mits} = 1, 2, \dots \quad (11.67)$$

$$e_s = \frac{2}{l} \frac{1}{\omega_s} \int_0^l dx \dot{\psi}(x, 0) \sin\left(\frac{s\pi x}{l}\right) \quad \text{mit } r = 1, 2, \dots \quad (11.68)$$

11.6.4 Die gezupfte Gitarrensaite

Die Gitarrensaite sei eingespannt zwischen 2 Punkten

- Skizze 2 Punkte auf x Achse für eingespannten Abstand, y - Achse $\psi(x, 0)$

Die Anfangsbedingung für den Schwingvorgang ist die Anfangsauslenkung A .

$$\psi(x, 0) = \frac{2A}{l} \cdot \begin{cases} x & f : 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l-x & f : \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \psi(x, 0) = 0$$

Für e_s gilt also dann $e_s = 0 \forall s$

Damit folgt also

$$\begin{aligned} d_s &= \frac{4A}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} dx x \sin\left(\frac{\pi s}{l} x\right) + \frac{4A}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} dx (l-x) \sin\left(\frac{\pi s}{l} x\right) \\ &= \frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{s^2} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Lösung der Wellengleichung

$$\psi(x, t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)}{r^2} \sin\left(\frac{r\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{r\pi c}{l} t\right) \quad (11.69)$$

11.7 Membranschwingungen als Verallgemeinerung der Wellengleichung auf 2 Dimensionen

Man betrachte eine dünne Membran, die elastisch wie die Saite sei und in der x, y -Ebene eingespannt sei.

Die Wellengleichung für Transversalschwingungen der Membran hat die Form

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi \quad (11.70)$$

Als Beispiel werde eine rechteckige Membran betrachtet, die an den Rändern $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ fest eingespannt sei.

Die Bernoulli'sche Lösung des Problems hat nun die Form

$$\psi(x, y, t) = \sin(kx) \sin(\tilde{k}y) \left\{ d \cos(\omega t) + e \sin(\omega t) \right\}$$

Der allgemeinere Ansatz für die Lösung der Wellengleichung hätte die Form

$$\psi(x, y, t) = e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (11.71)$$

Die Randbedingungen sind erfüllt, wenn für die k, \tilde{k} gilt

$$k = \frac{r\pi}{a} \quad , \quad \tilde{k} = \frac{s\pi}{b} \quad (11.72)$$

11 Lineare Schwingungen

Das liefert für die Eigenfrequenzen ω_{rs}

$$\omega_{rs} = \pi c \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}} \quad (11.73)$$

Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$\psi(x, y, t) = \sum_{r,s=1}^{\infty} \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \left\{ d_{r,s} \cos(\omega_{r,s}t) + e_{r,s} \sin(\omega_{r,s}t) \right\} \quad (11.74)$$

mit

$$d_{r,s} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b dx dy \psi(x, y, 0) \sin\left(\frac{\pi r x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi s y}{b}\right)$$

$$e_{r,s} = \frac{4}{ab \omega_{r,s}} \int_0^a \int_0^b dx dy \dot{\psi}(x, y, 0) \sin\left(\frac{\pi r x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi s y}{b}\right)$$

Es existieren $\omega_{r,s}$, die irrationale Vielfache der Grundfrequenz $\omega_{1,1} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$.

Beispiel für $a = b$ Für die Grundfrequenz gilt also

$$\omega_{1,1} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{2} \quad (11.75)$$

Einige Beispiele anderer Frequenzen

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \omega_{1,1}$$

$$\omega_{1,3} = \sqrt{5} \omega_{1,1}$$

Die allgemeine Lösung ist also nicht wie im eindimensionalen Fall periodisch in der Zeit. Es treten Entartungen auf für

$$\frac{r_1^2}{a^2} + \frac{s_1^2}{b^2} = \frac{r_2^2}{a^2} + \frac{s_2^2}{b^2} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{s_2^2 - s_1^2} \quad (11.76)$$

11 Lineare Schwingungen

Man kann festhalten, dass Entartungen nur möglich sind, wenn $\frac{a^2}{b^2}$ rational ist.

Die Knotenlinien der Eigenschwingungen

$$\psi_{rs}(x, y, t) = \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \left\{ d_{rs} \cos(\omega_{rs}t) + e_{rs} \sin(\omega_{rs}t) \right\} \quad (11.77)$$

und sie verlaufen parallel zum Rand

$$\begin{aligned} x &= 0, \frac{a}{r}, \frac{2a}{r}, \dots, a \\ y &= 0, \frac{b}{r}, \frac{2b}{r}, \dots, b \end{aligned}$$

Im Entartungsfall gibt es mehr Knotenlinien, diese sind auch komplizierter darzustellen als die Darstellung im nichtentarteten Fall.

Beispiel für $a = b$ Seien nur die Eigenschwingungen q_{12}, q_{21} angeregt und es gelte $\frac{d_{12}}{d_{21}} = \frac{e_{12}}{e_{21}} =: \mu$.

Wegen $\omega_{12} = \omega_{21} = \tilde{\omega}$ folgt

$$\psi(x, y, t) = \mu \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \left(d_{21} \cos(\tilde{\omega}t) + e_{21} \sin(\tilde{\omega}t) \right) \quad (11.78)$$

Daraus folgt

$$\mu \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = 0 \quad (11.79)$$

Für $\mu = \pm 1$ ist die Knotenlinie eine Diagonale über die Membran, für $\mu \neq \pm 1$ ist die Knotenlinie eine transzendente Kurve.

- Skizzen für verschiedene Knotenlinien einfügen, Kuypers Kapitel Lineare Schwingungen -

12 Hamilton'sche Mechanik

Man betrachte ein System mit N Teilchen und k holonomen Zwangsbedingungen. Für die Freiheitsgrade n des Systems gilt also dann natürlich

$$n = 3N - k \quad (12.1)$$

Daraus folgen für die Beschreibung des Systems mit Lagrangegleichungen 2.Art n Differentialgleichungen 2.Ordnung. Mit der Einführung der sogenannten kanonischen Impulse p_i , für die gilt

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_i} \quad (12.2)$$

erhält man bei der Beschreibung des Systems $2n$ Differentialgleichungen 1.Ordnung, die das System äquivalent beschreiben wie die n Differentialgleichungen, die mit der Lagrangemechanik gewonnen werden können.

Bemerkung Die kanonischen Impulse sind die vernünftigen Impulse, ein Mensch, der andere Impulse definieren, ist verrückt. Er benutzt dann die verrückten Impulse.

Im Allgemeinen sind die kanonischen Impulse verschieden von den kinematischen, nur für geschwindigkeitsabhängige Potentiale gilt die Gleichheit. Die Beschreibung des Systems wird im $2n$ -dimensionalen Phasenraum (mit Koordinaten p und q) vorgenommen - der Phasenraum ist verschieden vom Konfigurationsraum!

12.1 Die Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformation realisiert den Übergang der Variablen (x, y) einer Funktion $f(x, y)$ zu (μ, y) , wobei für μ gilt

$$\mu = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (12.3)$$

in eine neue Funktion $g(\mu, y)$. Das totale Differential gibt die infinitesimale Änderung einer Funktion in alle Richtungen an (und entsteht in der gleich angegebenen Form durch eine Taylorentwicklung 2.Ordnung) und hat die Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy \quad (12.4)$$

Nun definiert man

$$\begin{aligned} g &:= ux - f \\ &= u dx + x du - df = x du + v dy \end{aligned}$$

Die Funktion g ist also eine Funktion ausschließlich abhängig von u und y

$$dy = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy \quad (12.5)$$

12.1.1 Hamilton'sche Gleichungen

Die Legendre-Transformation der Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ auf die Variablen $(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{p})$ liefert also die Hamiltonfunktion

$$H(q, p, t) := \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (12.6)$$

Das totale Differential der Hamiltonfunktion hat also dann die Form

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n \left\{ \dot{q}_i dp_i + \cancel{p_i d\dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad \longrightarrow H(q, p, t) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$dH = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right\} - \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (12.7)$$

Daraus folgt dann für die sogenannten hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (12.8)$$

Es gilt die folgende wichtige, fundamentale, großartige Beziehung

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (12.9)$$

Merkhilfe Die Beschreibung einer eindimensionalen Bewegung irgendeines Teilchens hat im Hamiltonformalismus die Form

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \longrightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\nabla V \quad (12.10)$$

Wie erwartet liefert das hamilton'sche Prinzip $2n$ Differentialgleichungen, die eine eindeutige Lösung für $2n$ Anfangswerte $q_i(0), p_i(0)$ eindeutig lösbar sind.

Allgemein haben Gleichungssysteme aus dem hamilton'schen Prinzip (also Hamiltonsystem) die Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} \end{aligned}$$

Beachte Da die Hamiltonfunktion Funktion der Koordinaten und Impulse des Systems ist, enthält sie keine reinen Geschwindigkeiten! Drücke \dot{q} als Funktion von q, p und t aus!

$$\dot{q}_i(q, p, t) \quad (12.11)$$

12.1.2 Ein geladenes Teilchen im Magnetfeld \mathbf{B}

Für die Lagrangefunktion eines Teilchens im Magnetfeld gilt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\left(\Phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}\right) \quad (12.12)$$

Es gilt weiterhin

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \longrightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{m}\left(p - e \cdot \mathbf{A}\right) \quad (12.13)$$

Allerdings wird komponentenweise nach einem Vektor abgeleitet, man darf sich $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}$ vorstellen als den Vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

Für die Hamiltonfunktion folgt also insgesamt

$$\begin{aligned} H &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\Phi \\ \longrightarrow H &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A}\right)^2 + e\Phi \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ und $V = e\Phi$ gilt dann für die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad \left(H = T + V\right) \quad (12.15)$$

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld aufstellen. Es gelte dafür

$$\Phi = 0 \quad , \quad \mathbf{A} = \left(0, xB, 0\right) \quad \mathbf{B} = (0, 0, B) \quad (12.16)$$

Beim Einsetzen in die Hamiltonfunktion erhält man nun

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2m}\left(p_y - eBx\right)^2$$

und stellt für die Bewegungsgleichungen fest

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \longrightarrow p_x = m\dot{x} \quad , \quad p_y = m(\dot{y} + \omega x) \quad , \quad p_z = m\dot{z}$$

wobei die Frequenz ω den Namen Zyklotronfrequenz trägt und man für ω ausmachen kann

$$\omega := \frac{eB}{m} \tag{12.17}$$

Es folgt

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \longrightarrow \dot{p}_x = \omega(p_y - m\omega x) \quad , \quad \dot{p}_y = \dot{p}_z = 0 \tag{12.18}$$

Wenn man nun die gefundenen Beziehungen für \dot{q}_i und für \dot{p}_i einsetzt erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} - \omega\dot{y} \\ 0 &= \ddot{y} + \omega\dot{x} \\ 0 &= \ddot{z} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet dann

$$\begin{aligned} x(t) &= r \sin(\omega t + \delta) \\ y(t) &= r \cos(\omega t + \delta) \\ z(t) &= z_0 + vt \end{aligned}$$

12.2 Hamiltonfunktion und Energie

Für skleronome, holonome Nebenbedingungen und konservative Kräfte gilt

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \tag{12.19}$$

wobei T die kinetische Energie ist. Daraus folgt dann sofort, dass für H gilt

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - T + V = T + V = E \tag{12.20}$$

weshalb die Hamiltonfunktion die Gesamtenergie des Systems ist. Für konservative Kräfte gilt, dass der kanonische Impuls dem kinematischen entspricht, geschwindigkeitsabhängige Potentiale gehören also zu konservativen Kräften. Die totale zeitliche Änderung (totale Ableitung) von H ist also gleich

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (12.21)$$

Daraus folgt für die Hamiltonfunktion

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} \quad (12.22)$$

H ist eine Erhaltungsgröße, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt!

Perle auf rotierendem graden Draht Zwar gilt $\frac{dH}{dt} = 0$, die Energie des Systems ist aber nicht erhalten!

- Carsten Timm - Skizze einfügen

Elektron im Plattenkondensator Für H gilt

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} - Axt \\ &= T + V = E_{\text{El}} \end{aligned}$$

Allerdings gilt $\frac{dH}{dt} \neq 0$

12.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Das Prinzip der kleinsten Wirkung im Phasenraum ist äquivalent zu den Hamilton'schen Gleichungen; für die Wirkung S gilt

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i \quad (12.23)$$

wobei $\dot{q}_i p_i$ ein Volumenelement (aufgrund der Einheiten von p und q) im Phasenraum ist (!) und die ist gequantelt in \hbar .

Variiert man mit festgehaltenen Rändern, also

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = \delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0 \quad (12.24)$$

so erhält man für das Wirkungsintegral

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\delta H}{\delta p_i} \delta p_i \right\} \quad (12.25)$$

was man vereinfachen kann zu

$$\int_{t_1}^{t_2} dt p_i \delta \dot{q}_i = - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p}_i \delta q_i \quad (12.26)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right\} = 0 \quad (12.27)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Variationen müssen die Klammern einzeln verschwinden, daraus folgt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (12.28)$$

Bemerkung Die Hamilton'sche Mechanik ist ein wichtiges Prinzip zur Entwicklung der Quantenmechanik und der statistischen Physik.

Die Hamilton'schen Gleichungen ergeben Flüsse im Phasenraum, die dazu benutzt werden können, geometrisch Bewegungen zu diskutieren. Im Rahmen des Hamilton-Formalismus ist die Integrierbarkeit beziehungsweise das chaotische Verhalten leichter erkennbar, allein schon dadurch dass man nur Differentialgleichungen 1. Ordnung aus dem Hamilton-Formalismus erhält. Das erleichtert auch die numerische Lösung der Hamilton-Gleichungen.

Poisson-Klammer Man betrachte eine differenzierbare Funktion $f(q, p, t)$ von $q_i(t), p_i(t)$, wobei man f Observable nennt. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right\} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} + \frac{\partial f}{\partial t} := \{f, H\} \end{aligned}$$

Für zwei Observablen f, g definiert man nun die Poisson-Klammer

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\} \quad (12.29)$$

Es gilt also nun für die totale Ableitung von einer Observablen im Hamilton-Formalismus

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (12.30)$$

Erhaltungssätze können nun sehr bequem durch die Poisson-Klammer ausgedrückt werden. Sei f eine Observable und nicht explizit zeitabhängig, also gelte

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (12.31)$$

Falls nun gilt

$$\{f, H\} = 0 \quad (12.32)$$

folgt daraus sofort, dass die Observable f eine Erhaltungsgröße des Systems ist. Man kann sich nun auch davon überzeugen, dass gilt

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = -\{p_i, f\} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \{q_i, f\} \quad (12.33)$$

Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lassen sich also genauso mit der Poisson-Klammer ausdrücken. Es gilt dafür

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} \end{aligned}$$

Da die Poisson-Klammer eine antisymmetrische Bilinearform ist, gilt

Linearität	$\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$
Antisymmetrie	$\{f, g\} = -\{g, f\}$
Existenz eines Nullelements	$\{c, f\} = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
Produktregel	$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
Jacobi-Identität	$0 = \left\{ f, \{g, h\} \right\} + \left\{ g, \{h, f\} \right\} + \left\{ h, \{f, g\} \right\}$

Es gilt auch

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (12.34)$$

12.3.1 Der harmonische Oszillator

Die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators hat nun die Form

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2 \quad (12.35)$$

Für Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillator aus dem Hamilton'schen Prinzip folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \left\{ x, \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2 \right\} = \frac{1}{2m} \{x, p^2\} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \{p, H\} = \left\{ p, \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}x^2 \right\} = \frac{D}{2} \{p, x^2\} = Dx \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + Dx = 0 \quad (12.36)$$

12.4 Die kanonische Transformation

Man betrachte zunächst eine Punkttransformation, für diese gelte

$$\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) \quad (12.37)$$

Daraus folgt dann für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}\left(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t\right) \quad (12.38)$$

Für die Lagrangefunktion gilt aber weiterhin

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i} = 0 \quad (12.39)$$

Für die Impulse p_i gilt

$$p_i \rightarrow P_i = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}, t) p_j \quad (12.40)$$

Es folgt also

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_i} =: a_{ij}(\mathbf{q}, t) \quad (12.41)$$

Die Hamiltonfunktion hat dann die Form

$$k(Q, P, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i(Q, P, t) - \mathcal{L}'\left(Q, \dot{Q}(Q, P, t), t\right) \quad (12.42)$$

Die Hamiltongleichungen lauten also dann

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial k}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial k}{\partial Q_i} \quad (12.43)$$

Die Hamiltonfunktion ist also genau wie die Lagrangefunktion forminvariant.

Bei kanonischen Transformationen werden nun Orte und Impulse folgendermaßen transformiert

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i(q, p, t) \\ p_i &\rightarrow P_i(q, p, t) \end{aligned}$$

Für kanonische Transformationen ist allerdings dann charakteristisch, dass die Transformationen so durchgeführt werden, dass die Hamilton-Gleichungen für alle Hamilton-Funktionen forminvariant bleiben. Das bedeutet konkret, dass gilt

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial k}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial k}{\partial Q_i} \quad (12.44)$$

mit zunächst noch unbekannter Hamilton-Funktion $k(Q, P, t)$.

12.4.1 Das freie Teilchen

Die Hamiltonfunktion fürs freie Teilchen lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (12.45)$$

Man betrachte nun

$$Q = q \quad , \quad P = \sqrt{p} - q^2 \quad (12.46)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{q} = p = \left(P + Q^2\right)^2 \\ \dot{P} &= \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q} = -2Q\left(P + Q^2\right)^2 \end{aligned} \quad (12.47)$$

Behauptung

$$k(Q, P) = \frac{1}{3}\left(P + Q^2\right)^3 \quad (12.48)$$

liefert die Hamilton'schen Gleichungen, die mit 12.47 äquivalent sind. 12.46 ist also eine kanonoid Transformation

12.4.2 Teilchen im homogenen Schwerfeld

$$H = \frac{p^2}{2} + aq \quad (12.49)$$

$$\dot{q} = p \quad , \quad \dot{p} = -a \quad (12.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{q} = p = \left(P + Q^2 \right)^2 \\ \dot{P} &= \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q} = -\frac{a}{2} \left(P + Q^2 \right)^{-1} - 2Q \left(P + Q^2 \right)^2 \end{aligned}$$

Nun kann keine Funktion k gefunden werden, die die kanonischen Gleichungen (also die Hamilton-Gleichungen) ergibt, denn aus ?? folgen würde

$$\frac{\partial^2 k}{\partial Q \partial P} \neq \frac{\partial^2 k}{\partial P \partial Q} \quad (12.51)$$

Es gibt nun eine Bedingung für die kanonische Transformation, die erfüllt sein muss, damit es eine Funktion k geben kann, aus denen die gleichen Hamilton-Funktionen folgen können. Die Transformation $q, p \leftrightarrow P, Q$ ist nur dann kanonisch, wenn gilt

$$\begin{aligned} \forall H \exists k \forall t_1, t_2 : \quad & \delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(p, q, t) \right\} = 0 \\ & \longrightarrow \delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - k(Q, P, t) \right\} = 0 \\ \forall H \exists k(P, Q) : \quad & \sum_{i=1}^n \left(p_i \dot{q}_i - H \right) - \sum_{i=1}^n \left(P_i \dot{Q}_i - k \right) = \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \end{aligned}$$

Beachte

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) = \delta \left\{ F(2) - F(1) \right\} = 0 \quad (12.52)$$

F ist dabei „Erzeugende“ der kanonischen Transformation $q, p \rightarrow Q, P$. Dazu benötigt werden $2n$ Transformationsgleichungen, deshalb können von den $4n$ Variablen in $F(q, p, Q, P, t)$ nur $2n$ unabhängig sein.

Im Wesentlichen gibt es 6 Möglichkeiten

$$\begin{aligned}
 &F_1(q, Q, t) \\
 &F_2(q, P, t) \\
 &F_3(p, Q, t) \\
 &F_4(p, P, t) \\
 &F_5(q, p, t) \\
 &F_6(P, Q, t)
 \end{aligned}$$

Die ersten 4 sind dabei die wichtigsten, die 2 Möglichkeiten mit entweder einem kompletten alten oder neuen Koordinatensatz sind in der Regel nicht so interessant.

Die Erzeugende $F_1(q, Q, t)$

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right\} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (12.53)$$

Daraus folgt dann

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n \left(P_i \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) - k + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (12.54)$$

q_i, Q_i sind unabhängig bedeutet, dass auch die \dot{q}_i, \dot{Q}_i unabhängig sind; eine Gleichheit ist also nur dann möglich, wenn gilt

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i} \quad , \quad k = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (12.55)$$

Beispiel

a)

$$F_1(q, Q) = -\frac{Q}{q} \quad (12.56)$$

Das führt auf

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} &= \frac{Q}{q^2} &\longrightarrow Q &= pq^2 \\
 P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} &= \frac{1}{q} &\longrightarrow P &= \frac{1}{q}
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass F_1 die Legendre-Transformierte zu F_2 ist und umgekehrt. Analog sind F_3, F_4 ebenfalls Legendre-Transformierte von F_1 .

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q(p, Q), Q, t) - \sum_{i=1}^n q_i(p, Q, t) p_i$$

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_i Q_i P_i - \sum_i q_i p_i$$

Es gilt bei allen 4 Erzeugenden

$$K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad (12.60)$$

das heißt für nicht explizit zeitabhängige Transformationen gilt $K = H$, Transformationen sind genau dann kanonisch wenn

$$\sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i) = \frac{dF}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) = dF \quad (12.61)$$

Die linke Seite ist ein vollständiges Differential, d.h.

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_i} = \frac{\partial P_i}{\partial q_i} \quad (12.62)$$

Zusammenfassung Für die Erzeugendenfunktionen gilt zusammenfassen

$$F_1(q, Q, t) \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad p = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$F_2(q, P, t) \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$F_3(p, Q, t) \quad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$F_4(p, P, t) \quad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

12.4.3 Der harmonische Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 q^2 \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad (12.63)$$

Für die erste Erzeugende gilt

$$F_1(q, Q) = \frac{m}{2} \omega_0 q^2 \cot(Q) \quad (12.64)$$

Es folgt

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega_0^2 q \cot(Q)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m \omega_0^2 q^2}{2 \sin^2(Q)}$$

Daraus folgt

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin(Q) \quad , \quad p = \sqrt{2m\omega_0 P} \cos(Q) \quad (12.65)$$

F_1 ist nicht explizit zeitabhängig, also gilt $K = H$.

$$K(Q, P) = H\left(q(Q, P), p(Q, P)\right) = \omega_0 P \quad (12.66)$$

Damit gilt für die Hamiltongleichung

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \omega_0 & \longrightarrow & Q = \omega_0 t + \alpha \\ \dot{P} &= 0 & \longrightarrow & P = \frac{K}{\omega_0} = \frac{E}{\omega_0} = \text{const.} \end{aligned}$$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (12.67)$$

12.4.4 Vertauschung von Koordinaten und Impulsen

$$Q_i = p_i \quad , \quad P_i = -q_i \quad (12.68)$$

Obige Transformation ist kanonisch, da gilt

$$F_1 = \sum_i q_i Q_i \quad \text{oder} \quad F_4 = \sum_i p_i P_i \quad (12.69)$$

Das zeigt, dass in der Hamilton'schen Mechanik der Ort und der Impuls q, p eines Teilchens völlig gleichberechtigt sind und durch kanonische Transformationen ineinander überführbar sind.

12.4.5 Punkttransformationen

$$Q_i(q, t) = f_i(q, t) \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (12.70)$$

ist kanonisch, da gilt

$$F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^n f_i(q, t) P_i \quad (12.71)$$

Hierzu

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t) = Q_i$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} P_j \longrightarrow P_i$$

12.5 Kanonische Invarianzen

Phasenraumtransformation

$$q_i \rightarrow Q_i(q, p, t)$$

$$p_i \rightarrow P_i(q, p, t)$$

Es gibt nun 2 Methoden, nachzuprüfen, ob die obige Transformation kanonisch ist, oder nicht:

1. Kontruieren einer Erzeugenden
2. Für nicht explizit zeitabhängige Transformationen testen, ob $\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i)$ ein vollständiges Differential ist

Es gilt aber allgemein der wichtige Satz

Für eine kanonische Transformation

$$q_i \rightarrow Q_i \quad , \quad p_i \rightarrow P_i \quad (12.72)$$

gilt

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \quad , \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \quad , \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad (12.73)$$

Das bedeutet, die Poissonklammer ist eine kanonische Invariante!

Beispiel

$$Q = q^a \cos(bp) \quad , \quad P = q^a \sin(bp) \quad (12.74)$$

Nachrechnen mit der Poissonklammer liefert

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= a q^{a-1} \cos(bp) q^a b \cos(bp) + q^a b \sin(bp) a q^{a-1} \sin(bp) \\ &= a b q^{2a-1} \stackrel{!}{=} 1 \quad \longrightarrow \text{ist also erfüllt, wenn } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

12.6 Invarianz des Phasenraums

-Phasenraumdiagramm Vol V (Bohne) auf Vol V' (Ringel Lyoner) einfügen -

Es gilt nun bei kanonischen Transformationen für Volumen V und transformiertes Volumen \tilde{V}

$$V = \tilde{V} \quad (12.75)$$

Es soll also gelten

$$\forall V \in \Gamma \int_{\tilde{V}} \prod_i dQ_i dP_i = \int_V \prod_i dq_i dp_i \cdot D \quad (12.76)$$

mit

$$\Gamma = \{(p, q)\} \quad , \quad D = \det \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, \dots, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \quad (12.77)$$

Die Behauptung, die beiden Volumina seien identisch ist äquivalent zu $D = 1$

Bemerkung

$$\begin{aligned} u := u(x) \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} &= \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \left(\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(u_1, \dots, u_k)} \cdot \frac{\partial(u_1, \dots, u_k)}{\partial(x_1, \dots, x_j)} \right)_{ij} \end{aligned}$$

Beweis für $D = 1$

$$\begin{aligned}
 D &= \det \left(\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n; P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n)} \right) \cdot \det \left(\frac{\partial(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)} \right) \\
 &= (-1)^n \det \left(\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n; P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n)} \right) \cdot \left(\frac{\partial(q_1, \dots, q_n; Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)} \right) \\
 &= (-1)^n \det \left(\frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right) \Big|_{Q=\text{const.}} \cdot \det \left(\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) \Big|_{q=\text{const.}}
 \end{aligned}$$

Nun gilt - da es sich um eine kanonische Transformation handelt

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial Q_i \partial q_j} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \quad (12.78)$$

Und es gilt allgemein

$$\det \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right) = \det \left(\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right)^{-1} \quad (12.79)$$

Damit folgt

$$\det \left(\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) = (-1)^n \left(\det \frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right)^{-1}$$

Also gilt insgesamt

$$D = (-1)^{2n} \cdot \det \left\{ \frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right\} \cdot \det \left\{ \left(\frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right)^{-1} \right\} = 1 \quad (12.80)$$

□

12.7 Satz von Liouville

Man betrachte die zeitliche Entwicklung eines Phasenraumvolumens

- Bild einfügen -

Definition Phasenfluss Die Abbildung in den Phasenraum

$$g^t : \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$\{q(0), p(0)\} \rightarrow \{q(t), p(t)\}$$

wobei $\{q(t), p(t)\}$ Lösung der Hamiltongleichungen mit den Anfangsbedingungen $\{q(0), p(0)\}$ zur Zeit $t = 0$ sind.

Der Phasenfluss erhält das Phasenraumvolumen eines jeden Bereiches $D \subset \Gamma$ des Phasenraums, d.h. $\forall t : V(D) = V(D_t)$.

Beweismöglichkeiten

1. g^t ist eine kanonische Transformation
Beweis: Kuypers
2. Divergenzfreiheit des Phasenflusses
Beweis: hier

$$\text{Esist } V(t) = \int_{D_t} dp dq = \int_{g^t D(0)} dq dp = \int_{D(0)} dp dq dt \det \frac{\partial g^t(p, q)}{\partial (p, q)} \quad (12.81)$$

Betrachte allgemein

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (12.82)$$

als System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1.Ordnung mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(t)$$

wobei $\mathbf{x}(t)$ Lösung von 12.82 mit Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}(0)$

Nun gelte

$$g^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot t + \mathcal{O}(t^2) \quad (12.83)$$

Das führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} &= \mathcal{I} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \cdot t + \mathcal{O}(t^2) \\ \rightarrow \det \left(\frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \right) &= 1 + t \cdot \text{spur} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

allgemein gilt

$$\det(\mathcal{I} + \mathcal{A}t) = 1 + t \cdot \text{spur}(\mathcal{A}) + \mathcal{O}(t^2) \quad (12.84)$$

Daraus folgt für $V(t)$

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{D(t)} d\mathbf{x} = \int_{g^t D(0)} d\mathbf{x} = \int_{D(0)} d\mathbf{x} \det \left(\frac{\partial g^t \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ &= \int_{D(0)} d\mathbf{x} \left(1 + t \cdot \text{div} \mathbf{f} + \mathcal{O}(t^2) \right) \\ \rightarrow \frac{dV}{dt} &= \int_{D(0)} d\mathbf{x} \text{div} \mathbf{f} \end{aligned}$$

Wenn $\text{div} \mathbf{f} = 0$ folgt, dass $\frac{dV}{dt} = 0$

Hier gilt $\mathbf{x} = (p, q)$, wegen Hamiltongleichung

$$\text{div} \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) = 0$$

Es gelte

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (12.85)$$

12.8 Hamilton-Jacobi-Theorie

Bemerkung Wenn

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad \longrightarrow Q_i = \text{const.} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \longrightarrow P_i = \text{const.},\end{aligned}$$

Suche nun kanonische Transformation, die Q_i und P_i zu Konstanten der Bewegung macht. Eine solche Transformation ist gefunden, wenn die Hamiltonfunktion K identisch 0 ist, dann

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad (12.86)$$

Suche Erzeugende F die $K = 0$ zur Folge hat

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad , \quad K = 0 \quad \leftrightarrow \quad H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (12.87)$$

Wähle $F = F_2(q, P, t) \rightarrow p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$. Das liefert

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (12.88)$$

Diese Gleichung heißt „Hamilton-Jacobi-Gleichung“ und ist eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung 1.Ordnung in den $n + 1$ Variablen q_1, \dots, q_n, t für die Erzeugende F_2 .

Nach Berechnung von F_2 ergeben sich die Bahnen $q_i(t), p_i(t)$ durch

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q_i} \quad , \quad Q_i = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P_i} \quad (12.89)$$

Beachte P_1, \dots, P_n sind Konstanten der Bewegung, sind also die Integrationskonstanten der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung heißt Prinzipalfunktion oder Hamilton'sche Wirkungsfunktion.

Theorie der partiellen Differentialgleichungen legt nahe, dass die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung $n+1$ Integrationskonstanten wegen der $n+1$ Variablen enthält. Eine dieser Konstanten ist rein additiv, d.h. S und $S + \alpha$ sind Lösung

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) \quad (12.90)$$

Q_i und P_i sind nach Forderung Erhaltungsgrößen, $\alpha_i = Q_i \rightarrow F_1, \beta_i = -P_i$ oder $\alpha_i = P_i \rightarrow F_2, \beta_i = Q_i$ und in beiden Fällen $\beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}$.

Die α_i, β_i sind also aus den Anfangsbedingungen bestimmbar

$$\alpha_i = \alpha_i(q_0, p_0, t = 0)$$

$$\beta_i = \beta_i(q_0, p_0, t = 0)$$

12.8.1 Gebrauchsanweisung

- Stelle die Hamiltonfunktion $H(p, q, t)$ auf
- p_i in H durch $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ ersetzen und $\frac{\partial S}{\partial t}$ addieren
 $\rightarrow H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Falls möglich (!) vollständige Separation
 $\rightarrow n$ eindimensionale Integrationen liefern n Integrationskonstanten $S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t)$
- Löse $\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i = \text{const.}$ nach Koordinaten $q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_i, \dots, \beta_n, t)$ auf.
 Anschließend $\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q} = p_i$ ergibt Impuls $p_i(q(\alpha, \beta, t), t) = p(\alpha, \beta, t)$

Die $2n$ Konstanten α_i, β_i sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

12.8.2 Der harmonische Oszillator

- $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}q^2$
- $\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Ansatz: $S(q, \alpha_1, t) = W(q, \alpha_1) - \alpha_1 t$ Separationsansatz
 $\rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{D}{2}q^2 = \alpha_1$ Offenbar gilt $\alpha_1 = E$ mit E Gesamtenergie wegen $\frac{\partial W}{\partial q} = p$
 $\rightarrow S = W - Et = \sqrt{mD} \int dq \sqrt{\frac{2E}{D} - q^2} - Et$
- Integration leicht möglich, aber nur $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ gebraucht
 $\rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{D} - q^2}} - t = \beta_1$
 $\rightarrow t + \beta_1 = \sqrt{\frac{m}{D}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{D}{2E}} q\right)$
 $\rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2E}{D}} \sin(\omega_0 t + \beta_1)$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

12.8.3 Zentralkraftbewegung

$$- H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

$$- H = \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right) + V(r) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

- Ansatz: $S(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, t) = W(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 t$ mit α_i Integrationskonstante

$$\rightarrow \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + V(r) = \alpha_1 = E$$

Ansatz: $W(r, \varphi, E, \alpha_2) = W_1(r, E, \alpha_2) + W_2(\varphi, E, \alpha_2)$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi} \right) = 2mr^2[E - V(r)] - r^2 \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 \quad \forall \varphi, r$$

W Bruch und $2mr^2$ konstant $\rightarrow \alpha_2 \rightarrow W_2 = \sqrt{\alpha_2} \varphi$, $W_1 = \int dr \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_2}{r^2}}$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = P_\varphi = \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} = \sqrt{\alpha_2}$$

$$\rightarrow \int = W_1 + W_2 - E \cdot t = \int dr \sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{P_\varphi^2}{r^2}} + P_\varphi \varphi - E \cdot t$$

$$- \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial E} = \int dr \frac{m}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{P_\varphi^2}{r^2}}} - t = \beta_1$$

$$\rightarrow \frac{\partial S}{\partial P_\varphi} = - \int dr \frac{P_\varphi}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{P_\varphi^2}{r^2}}} + \varphi = \beta_2$$

12.9 Allgemeiner Separationsansatz

Nicht explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$: $S(\mathbf{q}, \alpha, t) = W(\mathbf{q}, \alpha) - \alpha_1 t$ liefert

$$H \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} \right) = \alpha_1 \tag{12.91}$$

Eine hinreichende Bedingung für den nachfolgenden Separationsansatz ist, dass für H gilt

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n H_i(q_i, p_i) \tag{12.92}$$

Das führt auf den Ansatz

$$W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Einsetzen in die Hamiltonfunktion liefert

$$\begin{aligned}
 H_j \left(q_j, \frac{\partial W_j}{\partial q_j} \right) &= \alpha_1 - \sum_{i=1, i \neq j}^n H_i \left(q_i, \frac{\partial W_i}{\partial q_i} \right) \quad \forall j = 2, \dots, n \\
 &= \text{const.} = \alpha_j \\
 \text{und } H_1 \left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1} \right) &= \alpha_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i
 \end{aligned}$$

Die Summenseparation für die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist sehr verwandt mit der Produktseparation für die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik.

Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist nicht eindeutig.

$$S = \int_{t_0}^t dt' \mathcal{L}(q(t'), \dot{q}(t'), t) = S(q(t), q(t_0), t) \quad (12.93)$$

ist ebenfalls Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Der Beweis dazu findet sich im Kuypers (6.Auflage) auf Seite 366.

Man betrachte nun die Änderung von S bei infinitesimalen Veränderungen dt der Endzeit.

$$\begin{aligned}
 dS &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i(t) + \frac{\partial S}{\partial t} dt \\
 \rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{mit } \frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i(t) \dot{q}_i(t) - \mathcal{L} + \frac{\partial S}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t}
 \end{aligned}$$

12.10 Winkel- und Wirkungsvariablen

Die Bestimmung von Frequenzen f_i von periodischen Bewegungen ist möglich, ohne die Bahnen $q_i(t)$ zu kennen. Dazu sind verschiedene Voraussetzungen nötig

Voraussetzung 1 System vollständig separabler Variablen: $S = \sum_i W_i(q_i, \alpha) - \alpha_1 \cdot t$

Daraus ergibt sich

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sum_{j=1}^n W_j(q_j, \alpha) - \alpha_1 t \right] = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i} \quad (12.94)$$

System periodisch a) Schwingung im Phasenraum $p(q)$ geschlossen

Skizze

b)

Skizze

$$\exists q_0 : p(q + q_0) = p(q) \quad \forall q \quad (12.95)$$

Definition: Wirkungsvariable

$$J_i = \oint p_i dq_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i} dq_i \quad (12.96)$$

$J_i = J_i(\alpha) = J_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ mit $i = 1, \dots, n$ sind Erhaltungsgrößen des Problems. Die J_i sind alle invertierbar, das bedeutet man kann die α_i bijektiv auf die J_i abbilden

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, J_2, J_3, \dots, J_n) \quad (12.97)$$

Damit folgt für die charakteristische Funktion

$$W(q, \alpha(\mathbf{J})) = \hat{W}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \sum_{i=1}^n \hat{W}_i(q_i, \mathbf{J}) \quad (12.98)$$

Die Erzeugende $F_2(q, \mathbf{J})$ einer kanonischen Transformation mit \mathbf{J} statt α als neuen kanonischen Impuls. Daraus folgt

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i, \alpha)}{\partial q_i} = \frac{\partial \hat{W}(q_i, \mathbf{J})}{\partial q_i}$$

$$\varphi_i := \frac{\partial \hat{W}(q, \mathbf{J})}{\partial J_i} \quad \text{Winkelvariable}$$

Die Transformation lautet dann

$$q_i, p_i \rightarrow \varphi_i, J_i \quad (12.99)$$

Die Bewegungsgleichung für \mathbf{J} und φ

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H \text{ (da } W \text{ nicht explizit zeitabhängig)} ; H \left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} \right) = \alpha_1$$

$$\rightarrow K = \alpha_1(J_1, \dots, J_n) = K(J_1, \dots, J_n)$$

das heißt die neue Hamiltonfunktion hängt nur von den Wirkungsvariablen ab

$$J_i = -\frac{\partial K}{\partial \varphi_i} = 0 \rightarrow J_i = \text{const.}$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial K}{\partial J_i} = \text{const.} = f_i \rightarrow \varphi_i = f_i \cdot t + \delta_i \quad \text{wobei } f_i \text{ Grundfrequenz}$$

Wegen

$$\varphi_i = \frac{\partial \hat{W}(q, J)}{\partial J_i} \quad (12.100)$$

hängt φ_i im Allgemeinen von allen q_j ab.

Behauptung φ_i ist periodisch in q_j für $i \neq j$ und wächst monoton mit q_j und

$$\varphi_i(q_i + q_0, \mathbf{q}, \mathbf{J}) = \varphi_i(q_i, q, J) + 1 \quad (12.101)$$

Beweis Betrachte Bewegung, in der jede Koordinate q_j nach K_j Umläufen zur selben Zeit auf ihre Anfangsposition zurückkehren

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \oint d\varphi_i = \oint \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_j} dq_j = \oint \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial q_j \partial J_i} dq_j \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{j=1}^n \oint \frac{\partial \hat{W}}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{j=1}^n \oint p_j dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_{j=1}^n K_j J_j = k_i \end{aligned}$$

Daraus folgt

1. Schwingungen: $q_i(\varphi_1 + k_1, \dots, \varphi_n + k_n, \mathbf{J}) = q_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \mathbf{J})$
2. Rotationen: $q_i(\varphi_1 + k_1, \dots, \varphi_n + k_n, \mathbf{J}) = q_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \mathbf{J}) + k_i q_{i0}$

Definition

$$q'_i(\varphi, J) = q_i(\varphi, J) - \varphi_i q_{i0}$$

$$\longrightarrow q'_i(\varphi_1 + k_1, \dots, \varphi_n + k_n, \mathbf{J}) = q'_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \mathbf{J})$$

Damit kann q_i und q'_i in eine n -fache Fourierreihe entwickelt werden

$$q_i(\varphi, \mathbf{J}) = \sum_{m_1, \dots, m_n = -\infty}^{\infty} a_{m_1, \dots, m_n}^{(i)}(\mathbf{J}) e^{2\pi i(m_1 \varphi_1, \dots, m_n \varphi_n)}$$

Die kanonische Rücktransformation von φ, \mathbf{J} auf q, p

$$a_{m_1, \dots, m_n}^{(i)}(\mathbf{J}) = \int_0^1 d\varphi_1 \dots \int_0^1 d\varphi_n q_i(\varphi, \mathbf{J}) e^{-2\pi i(m_1 \varphi_1, \dots, m_n \varphi_n)}$$

Einsetzen von $\varphi_i(t) = f_i t + \delta_i$ liefert

$$q_i(t) = \sum_{m_1, \dots, m_n} b_{m_1, \dots, m_n}^{(i)}(\mathbf{J}, \delta) e^{2\pi i(m_1 f_1, \dots, m_n f_n) \cdot t}$$

mit $b_{m_1, \dots, m_n}^{(i)}(\mathbf{J}, \delta) = a_{m_1, \dots, m_n}^{(i)}(\mathbf{J}) e^{2\pi i(m_1 \delta_1, \dots, m_n \delta_n)}$

Die Bewegung ist dann nicht notwendigerweise periodisch in der Zeit. Hinreichende Bedingungen für zeitliche Periodizität von $q_i(t)$, $q_j(t)$ sind

1. Die Bewegung ist eindimensional
2. $W_i(q, \mathbf{J}) = W_i(q, J_i) \longrightarrow \varphi_i = \frac{\partial \hat{W}(q_i, J_i)}{\partial J_i} = \varphi_i(q_i, J_i)$ und $W_j(j \neq i)$ unabhängig von J_i
3. $f_j = k_j f_i$, wobei k_j ganzzahlig

Die Bewegung des ganzen Systems ist periodisch in der Zeit, wenn gilt

$$\frac{f_1}{k_1} = \frac{f_2}{k_2} = \dots = \frac{f_n}{k_n} =: f$$

$$\longrightarrow q_i(t) = \sum_{m_1, \dots, m_n} b_{m_1, \dots, m_n}^{(i)}(\mathbf{J}, \delta) e^{2\pi i(m_1 k_1 + \dots + m_n k_n) f \cdot t}$$

12.11 Integrale und Nicht-Integrale Systeme, Chaos

Ein Hamilton'sches System heißt integrabel, wenn die Lösung der Bewegungsgleichung auf die Berechnung von eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden kann - dabei ist die analytische Lösbarkeit der eindimensionalen Integralen nicht gefordert. In diesem Fall ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung vollständig separierbar.

12.11.1 Satz von Liouville

Ein beschränktes Hamilton'sches System mit n Freiheitsgraden ist integrabel, wenn

$\exists J_i(q, p) \quad i = 1, \dots, n$ Funktion von q, p , nicht von t mit

1) $J_i(q, p)$ sind Erhaltungsgrößen, d.h. $\frac{d}{dt} J_i(q, p) = \{J_i, H\} = 0$

2) $\forall i, j : \{J_i, J_j\} = 0$

3) $dJ_i = \sum_{\kappa} \frac{\partial J_i}{\partial q_{\kappa}} dq_{\kappa} + \frac{\partial J_i}{\partial p_{\kappa}} dp_{\kappa}$

Beispiele für integrable Systeme

- Sphärisches Pendel: E, P_{φ}
- Teilchen im Kreiskegel: E, P_{φ}
- Rollpendel: E, P_x
- Ebene Zentralkraftbewegungen: E, P_{φ}
- Schwerer Kreisel: E, P_{φ}, P_{ψ}

Beispiele für nicht-integrable Systeme

- Federpendel (wobei Feder auch Kreisbewegungen zusätzlich zur Dehnung und Streckung ausführen kann)
- Doppelpendel

Beachte Differentielle Zwangsbedingungen oder Reibungskräfte können in Hamilton'schen Systemen nicht auftreten!

Beachte Ist 1-3 nicht erfüllt, **kann** das System für bestimmte Anfangsbedingungen und Parameter chaotisches Verhalten zeigen.

Es gilt: Ist 1-3 erfüllt, ist die Bewegung auf n -dimensionalen Unterraum im $2n$ -dimensionalen Phasenraum beschränkt $\rightarrow n$ -dimensionaler Torus.

12.11.2 Stabilitätsanalyse dieser Tori

Annahme $H(q, p)$ sei ein integrables System, dann folgt aus der Hamilton-Jacobi-Theorie, dass eine kanonische Transformation auf die Wirkungs- und Winkelvariablen existiert

$$(p, q) \rightarrow (J, \varphi) \quad \text{mit } J_i = \text{const.}, \quad \varphi_i = f_i t + \delta_i \quad (12.102)$$

Dabei parametrisieren $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ einen Torus, die ursprünglichen Koordinaten q, p sowie $H(q, p)$ sind periodische Funktionen von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Störungstheorie Betrachte „kleine“ Störungen eines integrablen Systems

$$H(\varphi, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\varphi, J) \quad (12.103)$$

Suche nun kanonische Transformation $(\varphi, J) \rightarrow (\varphi', J')$ mittels Erzeugender $S(\varphi, J')$

$$J_i = \frac{\partial S}{\partial \varphi_i}, \quad \varphi'_i = \frac{\partial S}{\partial J'_i} \quad (12.104)$$

so dass $H\left(\varphi, \frac{\partial S}{\partial \varphi}\right) = H_0(J + \epsilon H_1\left(\varphi, \frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)) = H'(J')$ nur von neuen Wirkungsvariablen abhängig

Ansatz $S(\varphi, J') = \sum_i \varphi_i J'_i + \epsilon S_1(\varphi, J'_i) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

Das liefert

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{\partial S_i}{\partial \varphi_i} = J'_i + \epsilon \frac{\partial S_i}{\partial \varphi_i} \\ \varphi'_i &= \frac{\partial S}{\partial J'_i} = \varphi_i + \epsilon \frac{\partial S_i}{\partial J'_i} \end{aligned}$$

Nach Rechnung ergibt sich

$$S(\varphi, J') = \sum_i \varphi_i J'_i + i\epsilon \sum_{m_1, \dots, m_n} \frac{\varphi}{\sum_i \omega_i m_i}$$

13 Spezielle Relativitätstheorie

Das Ergebnis des Experiments Michelson-Morley-Experiments hat als Konsequenz die Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit c konstant und hat den selben Wert in **allen** Inertialsystemen ist.

13.1 Blitzeinschlag im Flugzeug

Skizze Beobachter in der Mitte des Flugzeugs, auf beiden Enden schlägt gleichzeitig der Blitz ein

Der Beobachter im Flugzeug sieht die Blitze gleichzeitig vorne und hinten einschlagen.

Skizze Beobachter steht außerhalb des Flugzeugs und ist in Ruhe und sieht beide Blitze vorne und hinten einschlagen, während er den Mittelpunkt des Flugzeugs betrachtet

Der Beobachter außerhalb des Flugzeugs sieht den Blitz zuerst vorne eintreffen, dann hinten.

→ Relativität der Gleichzeitigkeit

13.2 Zeitmessung im „Inertialsystem“ - die Lampen-Spiegel-Uhr

Unbewegt

Skizze - Lichtquelle → Licht → gegenüberliegender Spiegel → Detektor - Abstand der beiden: D

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad (13.1)$$

13 Spezielle Relativitätstheorie

Bewegt

Die Lampe-Spiegel-Uhr bewegt sich nun mit Geschwindigkeit v nach rechts, L sei ein horizontaler Abstand von Symmetrieachse zu Spiegel bzw. Detektor

$$2L = v\Delta t \quad (13.2)$$

Damit folgt dann für c

$$c = \frac{2\sqrt{D^2 + L^2}}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{D^2 + \frac{v^2\Delta t^2}{4}}}{\Delta t} \quad (13.3)$$

Für Δt folgt dann

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.4)$$

d.h.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.5)$$

Die Zeit im bewegten Bezugssystem scheint von außen gedehnt.

13.3 Raumschiff auf dem Weg zum Neptun

Skizze Erde \rightarrow Raumschiff \rightarrow Neptun - Abstand Erde Neptun: L_0 , Geschw. v

Ruhsystem Erde: Reisezeit: $\Delta t = \frac{L_0}{v}$

Skizze \leftarrow Erde - Rakete \leftarrow Neptun

Ruhsystem Rakete: Reisezeit $\Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow L = v\Delta t_0 = v\Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

13.4 Die Lorentz-Transformation

Betrachte Lorentz-„Boost“: S sei ein ruhendes Inertialsystem, S' ist gegenüber S bewegtes Inertialsystem mit Geschwindigkeit v in x -Richtung.

13 Spezielle Relativitätstheorie

Transformation

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x' \\ t &\rightarrow t'\end{aligned}$$

muss wegen der Homogenität des Raumes linear sein.

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}t + \cancel{\varphi_1} \\ t' &= a_{21}x + a_{22}t + \cancel{\varphi_2} \\ y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}$$

Man wähle die Koordinatensystem nun so, dass gilt

$$\begin{aligned}t_0 &= t'_0 = 0 \\ x_0 &= x'_0 = 0\end{aligned}$$

Betrachte die Bewegung des Koordinatenursprungs von S' in S , also $x' = 0$

$$\begin{aligned}0 &= a_{11}x + a_{12}t \\ v &= \frac{x}{t} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\end{aligned}$$

Es gilt also $x'(0) = a_{11}(v)(x - vt)$, (S bewegt sich relativ zu S' mit $-v$) andererseits

$$x = a_{11}(-v)(x' + vt')$$

Da S und S' gleichwertig sind, folgt $a_{11}(v) = a_{11}(-v)$ (Invarianz unter Zeitspiegelung)

$$\rightarrow a_{11} = a_{11}(v^2)$$

Bestimmung von $a_{11}(v^2)$ über Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Lichtblitz bei $x = x' = 0$ zum Zeitpunkt $t = t' = 0$

$$x = ct \quad , \quad x' = ct'$$

13 Spezielle Relativitätstheorie

$$\begin{aligned} x &= a_{11}(v^2)(x' + vt') & x' &= a_{11}(v^2)(x - vt) \\ &= a_{11}(v^2)x' \left(1 + \frac{v}{c}\right) & &= a_{11}(v^2)x \left(1 - \frac{v}{c}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow xx' &= \left(a_{11}(v^2)\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot xx' \\ \rightarrow a_{11}(v^2) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Zudem wegen $-\frac{a_{12}}{a_{11}} = v$ gilt $a_{12} = -va_{11} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Also folgt

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.6)$$

und wegen $x = a_{11}(v^2)(x' + vt')$ folgt für t'

$$\begin{aligned} t' &= \left(\frac{x}{a_{11}} - x'\right) \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \left(x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x - x' \frac{v^2}{c^2} - x + vt\right) \frac{1}{v} \\ \rightarrow ct' &= \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Entsprechend:

$$a_{21} = -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Zusammengefasst

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'$$

Bei der Herleitung wurden benutzt

1. Homogenität und Isotropie des Raumes
2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit $c = c'$
3. Relativitätsprinzip

13.5 Messvorschriften und Gleichzeitigkeit von Ereignissen

13.5.1 Bewegte Uhren

Koordinatensystem von S

Skizze - Koordinatensystem / $y = ct$; $x = x$ - Lineare Funktion $f(x) = x - ct$; sogenannte Weltlinie der mittleren Geschwindigkeit v in x -Richtung gleichförmig bewegter Uhr; Steigungswinkel θ ; $\theta = \arctan\left(\frac{c}{v}\right)$; zeichne $\theta > 45^\circ$.

→ Koordinatensystem von S'

Skizze - Weltlinie der Uhr parallel zur Zeitachse - x_0 Achse: $t = 0$

Lorentztransformation für t_0 :

$$t_0 = \frac{t - \left(\frac{v}{c}\right)^2 x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow ct = \frac{v}{c}x \quad \text{d.h. } \tan(\varphi) = \frac{v}{c} \quad (13.7)$$

Betrachte nun 2 Ereignisse: $E_1 = 1.$ Schlagen der Uhr ; $E_2: 2.$ Schlagen der Uhr

Skizze

13 Spezielle Relativitätstheorie

$$t_{E_1} = \frac{t_{0E_1} + \frac{v}{c^2} X_{0E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_{E_2} = \frac{t_{0E_2} + \frac{v}{c^2} X_{0E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\rightarrow t_{E_2} - t_{E_1} = \frac{t_{0E_2} - t_{0E_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

→ Zeitdilatation

Wird dagegen die Information über das Auslösen des Kontakts bei x_{E_2} von x_{E_2} nach x_{E_1} mit Licht zurückgeschickt, dann ergibt sich

$$\Delta t_{E_2E_1} = \frac{x_{E_2} - x_{E_1}}{c} = \frac{v}{c} \frac{t_{0E_2} - t_{0E_1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mit

$$x_{E_i} = \frac{x_{0E} + vt_{0E_i}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.8)$$

Daraus folgt

$$\tau_{E_2E_1} = t_{E_2} - t_{E_1} = \Delta t_{E_2} - t_{E_1} + \Delta t_{E_1E_2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} (t_{0E_2} - t_{0E_1}) \quad (13.9)$$

Definition der Schlagfrequenz

$$v = \frac{1}{\tau_{0E_1E_2}} \quad , \quad v_0 = \frac{1}{\tau_{0E_1E_2}} \quad (13.10)$$

Das führt auf den relativistischen Dopplereffekt

$$v = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} v_0 \quad (13.11)$$

13.6 Bewegte Maßstäbe

1. Körper leuchtet für kurzen Moment auf (Gleichzeitigkeit in S_0)
2. Körper leuchtet ständig auf und wird in S fotografiert (Gleichzeitigkeit in S)
3. Körper wird vom Beobachter kurz beleuchtet

Fall 1

Skizze einfügen

$$l = x_2 - x_1$$

$$i = 1, 2 \quad : \quad x_i = \frac{x_{0i} - vt_{0E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = \frac{x_{02} - x_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Das heißt $l_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l$

Die Länge l_0 im Ruhesystem erscheint gegenüber l verkürzt, die **gleichzeitig** gemessene Länge l_0 erscheint kürzer!

Fall 2

Skizze einfügen

nun ist

$$x_{0i} = \frac{x_i - vt_E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{mit } i = 1, 2$$

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Es tritt also nun Längenkontraktion auf. Wieder gilt: Die gleichzeitig gemessene Länge l erscheint kürzer!

Fall 3

Skizze einfügen

Wegen $x_i = ct_i$ folgt

$$t_i = \frac{x_i}{c}$$

und deshalb gilt

$$x_{0i} = \frac{x_i - x_i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\rightarrow l_0 = (x_2 - x_1) \cdot \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Das heißt

$$l_0 = l \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (13.12)$$

13.7 Vierervektoren und die Lorentzgruppe

Definition

$$x^\alpha = (ct, x, y, z) =: (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\text{Kontravarianter Vektor})$$

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta = (ct, -x, -y, -z) \quad (\text{Kovarianter Vektor})$$

Es gilt, die einsteinsche Summenkonvention zu beachten! Es gilt

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Metrischer Tensor}) \quad (13.13)$$

Wellenfronten von elektromagnetischen Wellen definiert durch

$$x^\alpha x_\alpha = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (13.14)$$

13 Spezielle Relativitätstheorie

Im gleichförmig bewegten Bezugssystem S' gilt

$$x'^{\alpha}x'_{\alpha} = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (13.15)$$

Eine Transformation $x \rightarrow x'$ sei isotrop und nicht singular (also linear). Dann gilt

$$x^{\alpha'} = L_{\beta}^{\alpha}x^{\beta} \quad \text{oder} \quad x'_{\mu} = L'_{\mu} = L_{\mu}^{\nu}x_{\nu} \quad (13.16)$$

Die Lichtausbreitung soll invariant unter der Transformation 13.16 sein wenn $x^{\alpha}x_{\alpha}$ eine Invariante der Transformation ist. Dann muss gelten

$$\begin{aligned} x^{\nu'}x'_{\nu} &= L_{\alpha}^{\nu}L_{\nu}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \\ \rightarrow L_{\alpha}^{\nu}L_{\nu}^{\beta} &= \delta_{\alpha}^{\beta} \end{aligned} \quad (13.17)$$

13.17 definiert die Gruppe aller Lorentztransformationen (ähnlich wie $\mathcal{O}^T\mathcal{O} = \mathcal{I}$ die Gruppe der dreidimensionalen Drehungen).

Die Drehgruppe ist Untergruppe der Lorentzgruppe (d.h. die Lorentztransformationen sind die Verallgemeinerung der dreidimensionalen Drehgruppe).

$$L_{(\text{Drehung})} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{O} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad (13.18)$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} L_{\alpha}^{\alpha} &= \delta_{\alpha}^{\alpha} \\ L_j^i &= \mathcal{O}_{ij} \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3 \\ \text{mit } \mathcal{O}_{ij}\mathcal{O}_{jk} &= \delta_{ik} \end{aligned}$$

Spezielle Lorentztransformationen sind die Transformationen auf gleichförmig bewegte Bezugssysteme, sogenannte Lorentz-Boosts.

13 Spezielle Relativitätstheorie

Beispiel Lorentz-Boost in x -Richtung mit Geschwindigkeit v

$$\begin{aligned} ct' &= Act + Bx \\ x' &= Cct + Dx \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Das führt auf

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es folgt also, dass gelten soll

$$\begin{aligned} (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ A^2(ct)^2 + B^2x^2 + 2ABctx - C^2(ct)^2 - D^2x^2 - 2CDctx &\stackrel{!}{=} (ct)^2 - x^2 \end{aligned}$$

Das führt dann auf

$$\begin{aligned} A^2 - C^2 &= 1 \\ B^2 - D^2 &= -1 \\ \rightarrow A = D = \cosh(\varphi) \quad , \quad B = C = \sinh(\varphi) \quad AB - CD &= 0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich damit für L

$$L = \left(\begin{array}{cc|cc} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (13.19)$$

13.7.1 Die physikalische Bedeutung des Parameters φ

$x' = 0$ bedeutet $x \cosh(\varphi) = -ct \sinh(\varphi)$. Dieser Nullpunkt bewegt sich im System S mit $v = \frac{dx}{dt} = -c \frac{\sinh(\varphi)}{\cosh(\varphi)}$

Damit ergibt sich also für φ

$$\tanh(\varphi) = -\frac{v}{c} \quad (13.20)$$

Nun ist

$$\cosh(\varphi) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\varphi)} \quad \text{und} \quad \sinh(\varphi) = \tanh(\varphi) \cdot \cosh(\varphi) \quad (13.21)$$

Damit ergibt sich nun

$$\cosh(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma \quad \text{und} \quad \sinh(\varphi) = -\frac{v}{c} \gamma \quad (13.22)$$

Es ist also L

$$L = \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (13.23)$$

also

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (13.24)$$

Analog lassen sich Boosts in y und z -Richtung (mit v_z, v_y) zeigen und die Boosts in allgemeinen Richtungen $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (analog zu Drehungen in drei Dimensionen mit Winkel $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$).

13.8 Addition von Geschwindigkeiten

Skizze einfügen

S' bewege sich hierzu gegenüber S mit v_1 in x -Richtung, S'' bewegt sich gegenüber S' mit v_2 in x -Richtung. Lorentztransformationen sind wie Drehungen um einen imaginären Winkel ($\cosh(\varphi) = i \cos(\varphi)$) und bei Drehungen addieren sich die Winkel.

$$\frac{v}{c} = \tanh(\varphi) = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = -\frac{\tanh(\varphi_1) + \tanh(\varphi_2)}{1 + \tanh(\varphi_1)\tanh(\varphi_2)} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (13.25)$$

13 Spezielle Relativitätstheorie

Es gilt dann für die Geschwindigkeit v

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (13.26)$$