1. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *26.April.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

1. [*5 Punkte*] **Fouriertransformation**

1 (a) Zeigen Sie, dass die Deltafunktion durch das Integral

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

dargestellt werden kann.
Hinweis: Führen Sie diese Form der Deltafunktion durch Ergänzung eines quadratischen Terms $(-\epsilon k^2, lim_{\epsilon\to 0}, \epsilon > 0)$ im Exponenten auf die bekannte Darstellung der Deltafunktion

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-x^2/a^2}, a > 0$$

zurück.

1 (b) Zeigen Sie, dass eine Fouriertransformation

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$$

durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \hat{f}(k)$$

invertiert wird.

1 (c) Zeigen Sie, dass für die Funktion f und ihre Fouriertransformierte $\hat{f}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \left|\hat{f}(k)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ |f(x)|^2$$

2 (d) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der beiden folgenden Funktionen:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ und } g(x) = e^{-|x|}\ .$$

2. [*8 Punkte*] **Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte für ein Gauß-Wellenpaket**

Gegeben sei ein 1-dimensionales Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{N}{b(t)} e^{ik_0(x-r(t))} e^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b^2(t)}} \quad (N \in \mathbb{R})$$

$$\text{mit: } r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m} t,\ b^2(t) = \frac{1}{4a^2} + i\frac{\hbar t}{2m}.$$

2 (a) Bestimmen Sie N so, dass gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 = 1$

2 (b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x\rangle$ des Ortes x im Zustand $\psi(x,t)$.

2 (c) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle}$.

1 (d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, 0)$ zur Zeit $t = 0$.

Zeinab Sadjadi E2.6 Zi.4.28 Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
sadjadi@lusi.uni-sb.de mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de

3. [*4 Punkte*] **Pauli Matrizen, Eigenwerte**

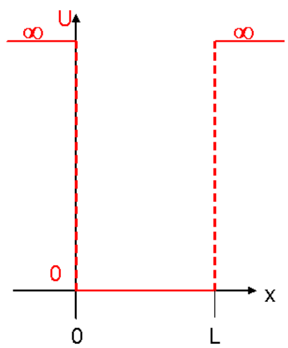
Zeigen Sie, dass die drei 2×2 Matrizen

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Kommutatorrelation (des Drehimpulses) $[S_1, S_2] = i\hbar S_3$ (und zyklische Permutationen) erfüllen. Zeigen Sie, dass es zwei linear unabhängige Egenvektoren $\psi_\pm$ zu S_3 mit Eigenwerten $\pm s\hbar$ gibt, und bestimmen Sie s. Zeigen Sie ausserdem dass $\psi_\pm$ Eigenvektore von $S = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ mit Eigenwert $s(s+1)/\hbar^2$ sind.

4. [*4 Punkte*] **Stationäre Schrödingergleichung, unendlich hoher Potentialkasten**

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im stationären Skalarpotential $U(x)$. $U(x)$ ist für $0 < x < L$ Null und sonst überall Unendlich. Am besten verdeutlichen lässt sich dieses System als unendlicher Potentialtopf mit undurchdringlichen Wänden, siehe Abbildung:



Berechnen Sie mit Hilfe der stationären Schrödinger-Gleichung die stationären Wellenfunktionen ψ_n und die dazugehörigen quantisierten Energiewerte E_n.

Zeinab Sadjadi E2.6 Zi.4.28 Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25

`sadjadi@lusi.uni-sb.de` `mape@lusi.uni-sb.de` `randonfurling@lusi.uni-sb.de`