10. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *28.Juni.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

38. [*8 Punkte*] **Messung von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$**

Der Zustand eines Teilchens sei durch folgende Linearkombination der Drehimpulseigenzustände $|l, m\rangle$ mit $l \geq 1$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|l,l\rangle + 2i|l,l-1\rangle + |l,l-2\rangle)$$

2 (a) Welche möglichen Messwerte haben $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$?

3 (b) Wie lauten die Erwartungswerte $\langle\hat{\mathbf{L}}^2\rangle$ und $\langle\hat{L}_z\rangle$?

3 (c) Wie groß sind die Unschärfen $\Delta\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\Delta\hat{L}_z$ in diesem Zustand?

39. [*4 Punkte*] **Vergleich mit klassischem Drehimpuls**

Zeigen Sie, dass für ein Teilchen mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ für den Erwartungswert des Drehimpulses in z-Richtung die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{L}_z\rangle = \langle(\hat{\mathbf{x}} \times (-\nabla V))_z\rangle$$

gilt.

40. [*13 Punkte*] **Teilchen im rotationssymmetrischen Potential/Kugelflächenfunktionen**

Der Hamilton-Operator für ein spinloses Teilchen der Masse m in einem dreidimensionalen Zentralpotential $V(r) = V(|\mathbf{r}|)$ ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r). \tag{1}$$

4 (a) Der Operator der kinetischen Energie in (1) lässt sich in einen Radialanteil und einen Winkelanteil zerlegen. Seine Wirkung auf einem Zustandsvektor in der Ortsdarstellung $\langle\mathbf{r}|\psi\rangle$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\langle\mathbf{r}|\hat{\mathbf{p}}^2|\psi\rangle &= -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\langle\mathbf{r}|\psi\rangle \\ &= -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\langle\mathbf{r}|\psi\rangle + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\langle\mathbf{r}|\psi\rangle - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\langle\mathbf{r}|\hat{\mathbf{L}}^2|\psi\rangle\right), \end{aligned}\tag{2}$$

wobei das Bahndrehimpulsquadrat $\hat{\mathbf{L}}^2$ den Winkelanteil beschreibt. Verifizieren Sie die folgende Relation für den Bahndrehimpulsoperator $\hat{\mathbf{L}}$, den Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ und den Impulsoperator $\hat{\mathbf{p}}$:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{\mathbf{r}}^2\hat{\mathbf{p}}^2 - (\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}})^2 + i\hbar\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\,. \tag{3}$$

Benutzen Sie diese, um die Relation (2) zu zeigen.

Hinweis: Nützliche Formel für das Levi-Civita-Symbol:

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 randonfurling@lusi.uni-sb.de

1 (b) Begründen Sie, warum sich die Eigenfunktionen zum Hamilton-Operator in (1) in der Form

$$\varphi(\mathbf{r}) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

darstellen lassen, wobei $Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$ die Kugelflächenfunktionen also gemeinsame Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ und $\hat{\mathbf{L}}^2$ in Polarkoordinaten sind.

2 (c) Im Gegensatz zu der Quantenzahl eines allgemeinen Drehimpulsoperators $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \cdots$ kann die Quantenzahl l nur ganzzahlige Werte annehmen. Begründen Sie dies.

(d) Die Wellenfunktion des betrachteten Teilchen in $V(r)$ sei durch

$$\psi(\mathbf{r}) = (x + y + 3z)\, f(r).$$

gegeben.

4 i. Ist ψ Eigenfunktion zu $\hat{\mathbf{L}}^2$? Wenn ja, geben Sie die entsprechende Quantenzahl l an, wenn nein, die möglichen Werte von l bei einer Messung von $\hat{\mathbf{L}}^2$.

2 ii. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, das Teilchen in verschiedenen m-Zuständen zu finden.

Hinweis: Finden Sie den Zusammenhang zwischen x, y, z und den Kulgelflächenfunktionen.

41. [*8 Punkte*] **Drehimpulsoperator/Spinoperator/Spinmessung**

Spin ist ein innerer Drehimpuls eines Teilchens. Wir bezeichnen den dazugehörigen Drehimpulsoperator oft auch als Spinoperator $\hat{\mathbf{S}}$ und ersetzen die Quantenzahl j durch s. In dieser Aufgabe wird Spin $s = 1/2$ betrachtet.

4 (a) Ein Spin $s = 1/2$ sei in einem Zustand, in welchem die z-Komponente des Spins den Wert $+\hbar/2$ besitzt. Was sind die möglichen Messwerte bei einer Messung der Spinkomponente bezüglich einer Richtung, welche mit der z-Achse den Winkel θ einschliesst? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für diese Messwerte.

4 (b) Betrachten wir den unitären Operator $\hat{D}_z(\theta) = \exp(-i\theta \frac{\hat{S}_z}{\hbar})$. Drücken Sie den Operator $\hat{D}_z^\dagger(\theta) \hat{S}_x \hat{D}_z(\theta)$ durch die Komponenten des Spinoperators $\hat{\mathbf{S}}$ aus.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de