11. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *05.Juli.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

42. [*10 Punkte*] **Spinpräzession/Spinresonanz**

Betrachtet wird ein Spin-1/2 Teilchen mit magnetischem Moment $e\hbar/2m_e c$. Das Teilchen befindet sich in einem homogenen Magnetfeld B_0 in z-Richtung. Wir berücksichtigen nur den Spinfreiheitsgrad, so dass das System durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird:

$$\hat{H} = -\frac{eB_0}{m_e c}\hat{S}_z \equiv \omega \hat{S}_z \,.$$

$\boxed{4}$ (a) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Operatoren $\hat{S}_x(t)$, $\hat{S}_y(t)$ und $\hat{S}_z(t)$ im Heisenberg-Bild.

$\boxed{2}$ (b) Zur Zeit $t = 0$ sei das System in dem $\hat{S}_x$-Eigenzustand $|+_x\rangle$ zum Eigenwert $+\hbar/2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer Messung von $\hat{S}_x$ zum Zeitpunkt $t > 0$ den Messwert $-\hbar/2$ findet.

$\boxed{4}$ (c) Das Teilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ in dem $\hat{S}_z$-Eigenzustand $|+\rangle$ zum Eigenwert $+\hbar/2$. Zu diesem Zeitpunkt wird zusätzlich zu $\mathbf{B}_0$ ein Wechselfeld eingeschaltet, welches senkrecht zur Richtung von $\mathbf{B}_0$ (z-Richtung) einwirkt:

$$\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{e}_x B_1 \cos(2\omega_0 t) - \mathbf{e}_y B_1 \sin(2\omega_0 t)$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ im Zustand $|-\rangle$ ($\hat{S}_z$-Eigenzustand zum Eigenwert $-\hbar/2$)?

43. [*5 Punkte*] **Erwartungswerte im H-Atom**

in Wasserstoffatom befinde sich in dem Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha_1|2,1,1\rangle + \alpha_2|2,1,0\rangle + \alpha_3|3,1,-1\rangle \;,$$

der eine Linearkombination von Eigenzuständen $|n,l,m\rangle$ ist. Bestimmen Sie die Erwartungswerte von $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{L}}^2$ und der Komponenten des Drehimpulses $\hat{L}_i$, $i = x, y, z$.

44. [*10 Punkte*] **Coulomb-Potential/Wasserstoffatom/quadratischer Stark-Effekt**

Das Wasserstoffatom besitzt ein Elektron mit der Elementarladung $-e$ im Coulomb-Potential $V(r) = -\frac{e^2}{r}$. Der Winkelanteil der Eigenfunktionen des Hamilton-Operators wird von den Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ beschrieben. Im ersten Teil dieser Aufgabe untersuchen wir den Radialanteil $f(r)$ der Wellenfunktionen, welcher die Eigenwertgleichung

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] + V(r)\right\} f(r) = E f(r)$$

zum Energieeigenwert E erfüllt. Als Längen- und Energieeinheiten benutzt man den Bohr-Radius $a_0 = \hbar^2/(me^2)$ und die Rydberg-Energie $R = e^2/(2a_0)$. In der Vorlesung wurden zwei dimensionslose Größen eingeführt:

$$\nu^2 = -\frac{R}{E} \;\text{ und }\; x = \frac{2}{\nu}\frac{r}{a_0}\,.$$

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — randonfurling@lusi.uni-sb.de

Mit einem passenden Lösungsansatz $y_l \equiv rf(r) = x^{l+1}e^{-\frac{1}{2}x}v_l(x)$ erhält man:

$$\left\{x\frac{d^2}{dx^2} + (2l+2-x)\frac{d}{dx} - (l+1-\nu)\right\} v_l(x) = 0. \tag{1}$$

$\boxed{5}$ (a) Verwenden Sie den Potenzreihenansatz $v(x) = \sum_k a_k x^k$ für Gl. (1). Zeigen Sie, dass die Reihe bei einer bestimmten Potenz n_r abbrechen muss, so dass $\nu \equiv n = l + 1 + n_r$ ($n_r = 0, 1, 2, \cdots$) und das Energiespektrum E_n diskret ist.

$\boxed{5}$ (b) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von r im Zustand mit den Quantenzahlen n und l gilt

$$\langle r \rangle_{nl} = \frac{a_0}{2}\left[3n^2 - l(l+1)\right], \tag{2}$$

indem Sie unter Verwendung der Radialgleichung (1) die folgende Rekursionsrelation für die Erwartungswerte der Potenzen von r mit $N \geq -2l-1$ zuerst ableiten:

$$\frac{N+1}{n^2}\langle r^N \rangle - (2N+1)a_0\langle r^{N-1}\rangle + \frac{Na_0^2}{4}\left[(2l+1)^2 - N^2\right]\langle r^{N-2}\rangle = 0. \tag{3}$$

Bemerkung: Sie können/dürfen $\langle r \rangle_{nl}$ direkt berechnen, ohne die Relation (3) zu benutzen. Die hier vorgeschlagende Methode ist allerdings (vielleicht) einfacher.

45. [*5 Punkte*] **Clebsch-Gordan Koeffizienten**

Berechnen Sie die Zustände und die zugehörigen Clebsch-Gordan Koeffizienten für ein 2-Spin-$\frac{1}{2}$ System, zum Beispiel ein System aus zwei unabhängigen Teilchen mit jeweils Spin $\frac{1}{2}$.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de