12. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *12.Juli.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

46. [*6 Punkte*] **Addition von Drehimpulsen/Clebsch-Gordan-Koeffizienten**
Zwei Drehimpulse $\hat{\mathbf{J}}_1$ und $\hat{\mathbf{J}}_2$ koppeln zu einem Gesamtdrehimpuls $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$. Berechnen Sie für $j_1 = 1, j_2 = 1/2$ sämtliche Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

47. [*4 Punkte*] **Clebsch-Gordan-Koeffizienten**
Ein Teilchen mit dem Spin $s = 1/2$ habe den Bahndrehimpuls $l = 1$. Der Gesamtdrehimpuls sei $j = 3/2$ und es sei $m_j = 1/2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der z-Komponente des Spins den Wert $m_s = 1/2$ liefert?

48. [*12 Punkte*] **Zeeman-Effekt und Spin-Bahn-Kopplung**
Ein Elektron in einem p-Zustand ($l = 1$) des Wasserstoffatoms befinde sich in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung. Wir berücksichtigen den Hamilton-Operator des Systems, der den Spin-Bahn-Term $\hat{H}_{LS}$ und den Zeeman-Term $\hat{H}_{\mathrm{B}}$ enthält:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{2W}{\hbar^2}\hat{\mathbf{L}}\cdot\hat{\mathbf{S}}}_{\hat{H}_{\mathrm{LS}}} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\hbar}B(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)}_{\hat{H}_{\mathrm{B}}},$$

wobei W eine Konstante und μ_B das Bohrsche Magneton ist.

$\boxed{4}$ (a) Berechnen Sie die exakten Energieeigenwerte von $\hat{H}$.

$\boxed{4}$ (b) Im Grenzfall des schwachen Magnetfelds $\mu_B B \ll W$ kann der Zeeman-Term als Störung gegenüber dem Spin-Bahn-Term betrachtet werden. Berechnen Sie im Rahmen der Störungstheorie erster Ordnung die Energieeigenwerte.

$\boxed{4}$ (c) Berechnen Sie störungstheoretisch die Energieeigenwerte in erster Ordnung in W für den Fall, dass das Magnetfeld stark gegenüber W ist, also $W \ll \mu_B B$.

49. [*8 Punkte*] **Dynamik eines Zwei-Zustand-Systems/Zeitabhängige Störungstheorie**
Wir betrachten ein Zwei-Zustand-System mit Energieeigenwerten $+E$ und $-E$, beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = E\,|+\rangle\langle+| - E\,|-\rangle\langle-|\,.$$

Auf das System wirkt ein Potential gegeben durch

$$\hat{W}(t) = v(t)\,|+\rangle\langle-| + v(t)\,|-\rangle\langle+|\,,$$

wobei $v(t)$ eine zeitabhängige, reelle Funktion ist und $v(t) \to 0$ für $t \to \pm\infty$.

$\boxed{3}$ (a) Zur Zeit $t \to -\infty$ sei das System im Zustand $|+\rangle$. Bestimmen Sie im Rahmen der Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit für den Übergang in den Zustand $|-\rangle$ zur Zeit $t \to \infty$ in niedrigster Ordnung in v.

$\boxed{5}$ (b) Angenommen, dass $E = 0$ und die Hamilton-Operatoren $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{W}(t)$ und $\hat{H}(t')$ zur verschiedenen Zeitpunkten kommutieren. Bestimmen Sie die *exakte* Wahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustand $|+\rangle$ ($t \to -\infty$) in den Zustand $|-\rangle$ ($t \to \infty$). Vergleichen Sie das Resultat mit dem aus der Störungstheorie.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — randonfurling@lusi.uni-sb.de