(Abgabe: bis zum *03.Mai.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zu je zwei Vektoren $|v\rangle, |u\rangle \in \mathcal{V}$

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ und } |u\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{C}$$

ist das Skalarprodukt definiert als

$$\langle v| \cdot |u\rangle \equiv \langle v|u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \beta_i \in \mathbb{C},$$

wobei $\langle v|$ "zu $|v\rangle$ dualer Vektor" heißt und gegeben ist als

$$\langle v| = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \cdots & \alpha_n^* \end{pmatrix}.$$

Über das Skalarprodukt lässt sich die Norm (Länge) eines Vektors durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}, \quad \forall\ |v\rangle \in \mathcal{V}$$

definieren. Die Vektoren $\langle v|$ werden „Bra" und die Vektoren $|u\rangle$ „Ket" (vom englischen „Bracket" für Klammer) genannt.

5. [*3 Punkte*] **Eigenwertproblem**

Angenommen, eine Observable A kann als folgende 3×3-Matrix dargestellt werden

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Warum weiß man, dass es eine Basis aus Eigenvektoren dieser Matrix gibt? Diagonalisieren Sie die Matrix, d.h. bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte, sowie die Basistransformationsmatrix. Gibt es Entartung in den Eigenwerten?

6. [*4 Punkte*] **Simultane Diagonalisierung**

Betrachten Sie einen drei-dimensionalen ket-Vektorraum. Mit einem bestimmten Satz von orthonormalen Kets, z.B. $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$, sei dann die Darstellung der beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gegeben durch

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

wobei a und b reelle Zahlen sind und $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ die Vektoren $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ sind.

$\boxed{1}$ (a) Der Operator $\hat{A}$ hat offensichtlich ein entartetes Eigenspektrum. Trifft dies auch auf $\hat{B}$ zu?

$\boxed{1}$ (b) Kommutieren die beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ miteinander?

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — `mape@lusi.uni-sb.de`
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — `randonfurling@lusi.uni-sb.de`

1 (c) Finden Sie einen neuen Satz von Basiskets (Linearkombinationen der Kets $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$), der aus gleichzeitigen Eigenkets für beide Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ besteht (warum ist das möglich?). Was sind die Eigenwerte der beiden Operatoren in dieser Basis? Kann eine eindeutige Zuordnung von Kets zu den Eigenwerten von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ vorgenommen werden?

1 (d) Betrachten Sie die Postulate der Quantenmechanik. Was muss für einen Zustand gelten, damit eine Observable (Operator) $\hat{\Omega}$ „scharf messbar“ ist, d.h. das Messergebnis durch den Zustand eindeutig bestimmt ist? Was muss für 2 Observablen $\hat{\Omega}$ und $\hat{\Lambda}$ gelten, damit beide gleichzeitig scharf messbar sind?

7. [*8 Punkte*] **Zweizustandssystem**

Gegeben sei folgender Hamilton-Operator $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \Delta & A \\ A & -\Delta \end{pmatrix}$$

2 (a) Bestimmen Sie die Eigenvektoren ρ_ν und Eigenwerte E_ν mit $\nu = 1, 2$.

(b) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\psi_0 = \psi(t = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 i. Entwickeln Sie den Zustand ψ_0 als Linearkombination von Eigenvektoren.

2 ii. Berechnen Sie den Zustand des Systems $\psi(t)$ für alle Zeiten t.

Hinweis: $\psi(t) = \sum_{\nu=1}^{2} a_\nu \rho_\nu e^{-iE_\nu t/\hbar}$.

1 (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(t)$ das System zur Zeit t wieder im Anfangszustand ψ_0 zu finden.

1 (d) Berechnen Sie den Mittelwert des Operators $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ im Zustand $\psi(t)$.

Hinweis: $\langle \sigma^z \rangle (t) = \psi^*(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi(t)$.

8. [*5 Punkte*] **Orthonormierte Funktionen**

Das Skalarprodukt zweier Funktionen ist definiert als

$$f \cdot g = \int f^*(x) g(x) dx$$

bzw. in der „bra-ket“ schreibweise als

$$\langle f|g \rangle = \int f^*(x) g(x) dx,$$

mit „$*$“ komplex konjugiert. Die Funktionen $f_1, f_2, ..., f_n$ heißen orthonormiert, falls gilt:

$$f_i \cdot f_j = \begin{cases} 0 & \text{falls}\, i \neq j \\ 1 & \text{falls}\, i = j. \end{cases}$$

2.5 (a) Die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators aus Aufgabe 4 von Blatt 1 sind (Randbedingungen: $\psi(x = 0) = \psi(x = L) = 0$) gegeben durch:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi x}{L}) \quad \text{mit } n = 1, 2, ...$$

Zeigen sie, dass die Funktionen ψ_n orthonormiert sind.

2.5 (b) Sei $\Psi(x)$ eine allgemeine Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ definiert ist und die an den Rändern die Funktionswerte Null besitzt ($\psi(x = 0) = \psi(x = L) = 0$). Stellen Sie die Funktion $\Psi(x)$ als (unendliche) Linearkombination der Funktionen ψ_n dar. Wie lauten die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten?

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de