3. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *10.Mai.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

9. [*5 Punkte*] **2-Zustandssystem, Spins**

In einem zweidimensionalen Vektorraum mit normierten Basisvektoren (e_+, e_-) sei ein hermitescher Operator $\hat{M}$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \hat{M}e_+ &= e_+ \\ \hat{M}e_- &= -e_- \\ < e_+|e_- > &= 0. \end{aligned}$$

1 (a) Wie lautet $\hat{M}$ in der Basis e_+ e_- ?

1 (b) Es werden neue Zustände definiert durch

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ + ie_-) \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_+ - ie_-). \end{aligned}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $M = +1$, $M = -1$ jeweils in den beiden Zuständen e_1 bzw. e_2?

1 (c) Zeigen Sie, dass e_1 und e_2 orthonormal sind. Es sollte also eine Matrix U geben, die (e_+, e_-) in (e_1, e_2) überführt. Geben Sie U an. In welche Matrix N wird M durch U transformiert.

1 (d) Wie lautet die allgemeinste hermitesche 2×2 Matrix, für die e_1 und e_2 Eigenzustände sind?

1 (e) Sind die beiden Zustände

$$\begin{aligned} e_a &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+ + i\sqrt{2}e_-) \\ e_b &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e_+ - i\sqrt{2}e_-). \end{aligned}$$

orthonormal? Was sind die Wahrscheinlichkeiten für $M = \pm 1$ in den beiden Zuständen? Was ergibt sich für die Erwartungswerte von N in e_a bzw. e_b ?

10. [*7 Punkte*] **Funktionen von Operatoren**

Sei die Funktion $f(z)$ analytisch, dass heißt in eine Taylorreihe entwickelbar: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann kann man für einen "geeigneten" Operator A den Operator $f(A)$ definieren durch

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \tag{7.1}$$

3 (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialreihe, dass für lineare Operatoren A und B gilt:

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)\,, \tag{7.2}$$

falls $[A, B] = 0$.
In diesem Fall kann man nämlich die binomische Formel $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ benutzen.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de

2 (b) Zeigen Sie, dass $\exp(iA)$ unitär ist, falls der Operator A hermitesch ist.

2 (c) Zeigen Sie, dass der Operator

$$T(\mathbf{a}) := \exp(\mathbf{a}\nabla) \text{ mit } \nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \text{ und } \mathbf{a} \text{ ein konstanter Vektor} \tag{7.3}$$

eine Translation beschreibt, d.h. für geeignete Funktionen $f(\mathbf{x})$ gilt

$$T(\mathbf{a})f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{a})\,. \tag{7.4}$$

Ist $T(\mathbf{a})$ unitär?

11. [*12 Punkte*] **Gauß'sches Wellenpaket**

Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer Raumrichtung wird durch eine Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschrieben, die sich als Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) = 0$$

(mit geeigneter Anfangsbedingung $\psi(x,0)$) ergibt.

2 (a) Wir setzen eine Lösung der Form $\psi_k(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ an. Die Wellenzahl k und die Frequenz ω (beide reell) sind freie Parameter. Welche Beziehung muß zwischen den Parametern k und ω gelten, damit die Schrödingergleichung erfüllt ist?

2 (b) Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion $\psi(x,0) = \psi(x)$ vorgegeben. Die Fouriertransformierte der anfänglichen Wellefunktion sei $\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-ikx}\psi(x)$. Zeigen sie, dass sich mit $\omega = \omega(k)$ aus (a) die Wellenfunktion zur Zeit t schreiben läßt als

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{i(kx-\omega t)}\hat{\psi}(k),$$

d.h. in dieser Form ist die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt.

3 (c) Wir wollen nun die Wellenfunktion spezifizieren. Durch

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{x^2}{4\sigma_0^2}+ik_0x}$$

wird das sogenannte Gaußpaket definiert (σ_0, k_0 sind reelle Parameter). Berechnen Sie $\hat{\psi}(k)$ und daraus $\psi(x,t)$ für das Gaußpaket. Führen Sie die Zeitskala $\tau = \frac{2m\sigma_0^2}{\hbar}$ ein.

5 (d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ für das Gaußpaket. Führen Sie die Größen $\sigma^2 := \sigma_0^2(1+\frac{t^2}{\tau^2})$ und $v_0 := \frac{\partial\omega}{\partial k}|_{k_0} = \frac{\hbar k_0}{m}$ ein.
Wie entwickelt sich die Breite des Gaußpakets (Geben Sie die zeitliche Ableitung der Breite an und erläutern Sie Ihr Ergebnis für $t \ll \tau$ bzw. $t \gg \tau$.) und wie bewegt sich sein Mittelpunkt?

12. [*5 Punkte*] **Endlicher Potentialtopf mit reflektierendem Rand**

Betrachten Sie ein Teilchen in dem Potential $V(x)$ (siehe Abbildung 1), für das gilt:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ -V_0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{für } x > a \end{cases} \tag{7.5}$$

Berechnen Sie die Energieeigenwerte der gebundenen Zustände.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de — randonfurling@lusi.uni-sb.de

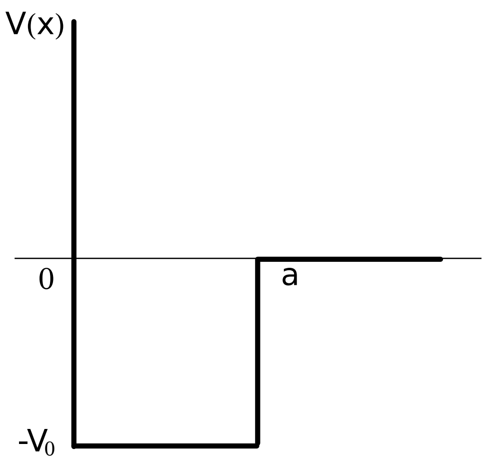

Abbildung 1: Endlicher Potentialtopf mit reflektierendem Rand.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de