(Abgabe: bis zum *17.Mai.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

13. [*8 Punkte*] **Harmonischer Oszillator - Erzeuger und Vernichter**

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

1 (a) Entdimensionalisieren Sie Orts- und Impulsoperator gemäß

$$x = x_0 \xi; \qquad p = -i p_0 \partial_\xi .$$

Wählen Sie die charakteristischen Längen und Impulseinheiten, x_0 und p_0, so dass sich der Hamilton-Operator ergibt zu:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right)$$

1 (b) Ermitteln Sie den zu $a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \partial_\xi)$ adjungierten Operator $a^\dagger$ aus der Relation $\langle a^\dagger f | g \rangle = \langle f | a g \rangle$ mit dem auf Blatt 2 definierten Skalarprodukt $\langle f | g \rangle$ für Funktionen.

1 (c) Zeigen Sie, dass sich der Hamilton-Operator H mit Hilfe des Operators $N = a^\dagger a$ schreiben lässt als $H = \hbar\omega(N + 1/2)$.

1 (d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1; \quad [N, a] = -a; \quad \left[N, a^\dagger\right] = a^\dagger;$$

(e) ψ_λ sei die Eigenfunktion von $N = a^\dagger a$ zum Eigenwert λ, d.h. $N\psi_\lambda(\xi) = \lambda \psi_\lambda(\xi)$. Geben Sie den Energieeigenwert E_λ an. Zeigen Sie:

1 i. $\lambda \geq 0$

1 ii. $\lambda = 0 \Rightarrow a\psi_\lambda = 0$

1 iii. Für den Fall $\lambda \neq 0$ folgt: $a\psi_\lambda$ ist Eigenfunktion von N zum Eigenwert $\lambda - 1$ und $a^\dagger \psi_\lambda$ ist Eigenfunktion von N zum Eigenwert $\lambda + 1$.

1 (f) Aus den vorherigen Aufgabenteilen weiß man nun, dass das Eigenwertspektrum von N aus den nichtnegativen ganzen Zahlen besteht. Durch sukzessive Anwendung von $a^\dagger$ zeige man

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \psi_0$$

wobei die Funktion ψ_0 durch $a\psi_0 = 0$ und der Faktor $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ die Funktion ψ_n auf 1 normiert, wenn ψ_0 auf 1 normiert ist.

14. [*8 Punkte*] **Anfangswertproblem des harmonischen Oszillators**

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator, der sich zur Zeit $t = 0$ in einem Zustand befindet, der einer Wellenfunktion $\psi(x, 0) = \psi_0(x - x_0)$, wobei $\psi_0(x)$ den Grundzustand des Oszillators darstellt, d.h.

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right] \tag{7.1}$$

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 randonfurling@lusi.uni-sb.de

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\psi(x,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}x_0\hat{p}}\psi_0(x)$$

mit $\hat{p}$ Impulsoperator.

Hinweis: Entwickeln Sie die Exponentialfunktion in einer Taylor-Reihe.

$\boxed{2}$ (b) Schreiben Sie $\psi(x,0)$ mit Hilfe des Erzeugungsoperators a^+ (NB $\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^+ - a)$) als:

$$\psi(x,0) = e^{-\frac{1}{4}\xi_0^2} e^{\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}a^+}\psi_0(x) \quad (\xi_0 := x_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}})$$

Hinweis: Benutzen Sie die Baker-Hausdorff-Formel $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$.

$\boxed{2}$ (c) Schreiben Sie $\psi(x,0)$ als Summe über Eigenzustände ψ_n des harmonischen Oszillators und berechnen Sie $\psi(x,t)$ mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\psi_n(x)$$

$\boxed{2}$ (d) Berechnen sie den Mittelwert $\langle x\rangle(t)$ des Ortes als Funktion der Zeit.

15. [*2 Punkte*] **Teilchen in 3D-Potentialtopf**

Bestimmen Sie die Eigenzustände eines Teilchens welches in einem Quader der Kantenlängen $a, b, c > 0$ eingeschlossen ist, d.h.

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{x} \text{ in Quader} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.2}$$

mit $a, b, c > 0$.

16. [*5 Punkte*] **Der dreidimensionale harmonische Oszillator**

Der Hamilton-Operator des dreidimensionalen anisotropen harmonischen Oszillators mit der Masse m hat die Form

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

$\boxed{2}$ (a) Drücken Sie H als Summe von eindimensionalen Hamilton-Operatoren aus und bestimmen Sie die Energieeigenwerte.

$\boxed{2}$ (b) Betrachten Sie den isotropen Fall, für den die Kreisfrequenzen gleich sind: $\omega_x = \omega_y = \omega_z$. Wie groß ist die Entartung des 0-ten, 1-ten, ..., n-ten Eigenzustandes? Geben Sie die Entartung im allgemeinen Fall an.

$\boxed{1}$ (c) Geben Sie die Parität der Eigenzustände zum n-ten Eigenwert an.

17. [*7 Punkte*] **Der Paritätsoperator und das Doppel-Delta-Potential**

Der Paritätsoperator Π ist definiert durch $\Pi\,|r\rangle = |-r\rangle$, wobei $|r\rangle$ der Eigenket des Ortsoperators R zum Eigenwert r ist. Zeigen Sie

$\boxed{1}$ (a) $\Pi^2 = 1$ und somit $\Pi^{-1} = \Pi$. Mit der Ortsdartsellung von Π zeige man $\Pi = \Pi^\dagger$.

$\boxed{1}$ (b) Π hat die Eigenwerte ± 1. Die Eigenfunktionen in Ortsdartsellung zu den Eigenwerten +1 und -1 sind die geraden bzw. ungeraden Funktionen.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de — randonfurling@lusi.uni-sb.de

(c) Betrachten Sie das Doppel-Delta-Potential (siehe Abbildung 1), das gegebn ist durch:

$$V(x) = -\alpha\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]$$

mit den positiven, reelen Konstanten a und α. Da für dieses Potential $V(-x) = V(x)$ gilt ist hier die Parität eine „gute“ Quantenzahl. Dies bedeutet, dass die Lösungen Eigenfunktionen des Paritätsoperators Π zu den Eigenwerten ± 1 sind; $\Pi\psi(x) = \psi(-x) = \pm\psi(x)$. Die Lösungen sind also entweder gerade oder ungerade unter $x \to -x$.

$\boxed{3}$ i. Wieviele gebundene Zustände gibt es?
Hinweis: Setzen sie zunächst für die drei verschiedenen Raumbereiche Lösungsfunktionen an. Benutzen Sie dann die dem Problem entsprechenden Rand- und Stetigkeitsbedingungen um die unbekannten Faktoren zu bestimmen. Bestimmen Sie sowohl die gerade als auch die ungerade Lösung graphisch (nach einer Substitution erhalten Sie Gleichungen der Form $e^{-y} = \pm 1 \mp cy$).

$\boxed{1}$ ii. Finden Sie die erlaubten Energien der gebundenen Zustände für i) $\alpha = \hbar^2/(ma)$ und ii) $\alpha = \hbar^2/(4ma)$ und skizzieren Sie die Wellenfunktionen. Sind die Wellenfunktionen Eigenzustände des Paritätsoperators?

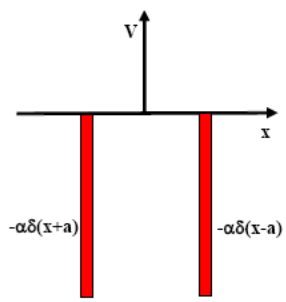

Abbildung 1: Doppel-Delta-Potential

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de