(Abgabe: bis zum *25.Mai.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

18. [*20 Punkte*] **Harmonischer Oszillator**

5 (a) Berechnen Sie die Matrixelemente von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ in der Eigenbasis des harmonischen Oszillators und stellen Sie jeweils explizit die Matrix dar[1]. Schreiben Sie dazu Orts- und Impulsoperator als Linearkombination der Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^+$ und $\hat{a}$.

4 (b) Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist symmetrisch in $\hat{x}$ und $\hat{p}$ (bis auf Konstanten). Benutzen Sie diese Symmetrie um den Grundzustand in Impulsdarstellung anzugeben. Vergleichen Sie dazu die Gleichung des Grundzustandes $0 = \hat{a}|0\rangle$ in Orts- und Impulsdarstellung.

3 (c) Stellen Sie mit Hilfe des Ehrenfestschen Theorems eine Differentialgleichung für $\langle \hat{a}\rangle(t)$ auf und lösen Sie diese für $\langle \hat{a}\rangle(t=0) = \langle \hat{a}\rangle_0$.

5 (d) Betrachten Sie die Eigenzustände $\{|\alpha\rangle\}$ des Absteigeoperators, die auch *kohärente Zustände* genannt werden und definiert sind durch

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \ . \tag{7.1}$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$, $\langle\hat{p}^2\rangle$ in der Eigenbasis von $\hat{a}$ und zeigen Sie damit, dass das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$ der Eigenzustände den minimal möglichen Wert annimmt.

3 (e) Betrachten Sie das eindimensionale Potential des "halbierten" harmonischen Oszillators

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

Geben Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator $\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ an. *Hinweis*: nicht rechnen, denken!

19. [*6 Punkte*] **Hermitesche Polynome**

2 (a) Zeigen Sie, dass sich der Vernichtungsoperator in Ortsdarstellung schreiben lässt als:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{d}{dy} + y\right],$$

mit $y = \left[\frac{m\omega}{\hbar}\right]^{\frac{1}{2}} x$.

1 (b) Benutzen Sie die Relation $\hat{a}|0\rangle = 0$ um die Wellenfunktion $\psi_0(y)$ des Grundzustandes zu berechnen.

3 (c) Benutzen Sie die Ortsdarstellung des Erzeugungsoperators um zu zeigen, dass die Wellenfunktion des n-ten angeregten Zustandes gegeben ist durch:

$$\psi_n(y) = h_n(y)\psi_0(y),$$

mit

$$h_n(y) = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^{\frac{1}{2}}} e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

einem Polynom n-ten Grades.

[1] Natürlich nicht die ganze Matrix, sondern nur einen signifikanten Anteil oben links.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 randonfurling@lusi.uni-sb.de

20. [*6 Punkte*] **Operator Algebra**

Die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ erfüllen die folgenden Relationen: $\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ und $\hat{a}^2 = {\hat{a}^\dagger}^2 = 0$.

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ nur die Werte 1 und 0 annehmen können.

$\boxed{2}$ (b) Nehmen Sie die Existenz eines normalisierten Zustandes $|0\rangle$ mit Eigenwert 0 an und konstruieren sie einen normalisierten Zustand $|1\rangle$ mit Eigenwert 1. Zeigen Sie, dass und wie $|0\rangle$ sich mit Hilfe von $|1\rangle$ darstellen lässt.

$\boxed{2}$ (c) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{a}|n'\rangle$ und $\langle n|\hat{a}^\dagger|n'\rangle$ (mit $n, n' = 0, 1$) und überprüfen Sie, dass diese Matrizen die richtige Algebra erfüllen (i.e. die Operatorrelationen die oben angegeben sind).

21. [*7 Punkte*] **Eigenschaften des Spin-1/2-Operators**

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften für die Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_i$. Benutzen Sie dabei *nicht* die explizite Darstellung der Matrizen, sondern nur die Kommutatoren $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$ und die Tatsache, dass die Eigenwerte der Matrizen $+1$ und -1 sind[2].

$\boxed{2}$ (a) $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\mathcal{I}}$.

Bedenken Sie dabei, dass die Darstellung der Einheitsmatrix in jeder Basis gleich ist.

$\boxed{3}$ (b) $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j]_+ = \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i = 0$.

$\boxed{2}$ (c) $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma_j} = i \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$.

Hinweis zu (b): Berechnen Sie zunächst $\hat{\sigma}_i[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j]$ und $[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j]\hat{\sigma}_i$.

[2] Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Spinoperatoren $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i$ die Eigenwerte $+\frac{\hbar}{2}$ und $-\frac{\hbar}{2}$ besitzen.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — `mape@lusi.uni-sb.de`
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — `randonfurling@lusi.uni-sb.de`