(Abgabe: bis zum *31.Mai.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

22. [*14 Punkte*] **bra-ket Schreibweise**

Gegeben sei ein System, das nur gebundene Zustände hat. Ein Teilchen befinde sich in einem beliebigen Zustand, der durch den normierten ket-Vektor $|\psi\rangle$ beschrieben wird. Die Eigenzustände des Operator $\hat{x}$ seien $|x\rangle$, diejenigen des Hamilton-Operators $\hat{H}$ zum Eigenwert E_n seien $|n\rangle$. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

2 (a) $\langle \hat{H} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \, |\langle n|\psi\rangle|^2$

2 (b) $\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, |\langle x|\psi\rangle|^2 \, dx$

2 (c) $\langle \hat{x} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \langle n|\psi\rangle^* \langle m|\psi\rangle \, x_{nm}$ mit: $x_{nm} := \langle n|\hat{x}|m\rangle$

2 (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (E_n - E_m) \, |x_{nm}|^2 = \frac{\hbar^2}{2M}$ mit M : Teilchenmasse (Thomas-Reiche-Kuhn Summenregel)

2 (e) $\hat{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \, |n\rangle \langle m|$

2 (f) $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \, |n\rangle \langle n|$

2 (g) Geben Sie eine Interpretation der folgenden Skalarprodukte: $\langle n|\psi\rangle$, $\langle x|\psi\rangle$, $\langle x|n\rangle$, $\langle n|x\rangle$

23. [*18 Punkte*] **Messprozess I: Teilchen vor und nach einer Messung**

3 (a) Mit Hilfe vieler scharfer Einzelmessungen des Ortes x von Teilchen, die die gleiche Vorgeschichte durchlaufen haben, erhält man eine relative Häufigkeitsverteilung $H(x)$. ($H(x)$ ist hierbei eine Schätzfunktion die man durch Anpassung an gegebene diskrete Häufigkeitsverteilungen der Messpunkte erhält.) Wie sieht für ein einzelnes Teilchen die Wellenfunktion zum Zeitpunkt der Messung (bzw. unmittelbar danach) aus? Geben Sie eine Näherung (die durch die Anzahl der Messungen beliebig verbessert werden kann) für die Wellenfunktion unmittelbar vor der Messung an. Achtung: Die Lösung ist nicht eindeutig, geben Sie die allgemeine Lösung an.

4 (b) Eine Energiemessung zum Zeitpunkt $t = 0$ ergebe die Grundzustandsenergie, wobei der Grundzustand eine Normalverteilung um den Punkt x_0 mit Breite σ ist:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Wie sieht dann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Impulse aus? Welche Relation gilt zwischen Orts- und Impulsunschärfe $\sigma_x = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle$ und $\sigma_p = \langle (p - \langle p\rangle)^2\rangle$ der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen? (Tipp: Sie brauchen die Unschärfen nicht explizit als Mittelwerte zu berechnen)

9 (c) Zum Zeitpunkt der Messung werde das Teilchen (aus b) „befreit“, d.h. es wirkt ab dann kein Potential mehr. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Ortes und Impulses allgemein für $t > 0$ und $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass sich die Ortsunschärfe mit der Zeit entwickelt nach $\sigma_z^2(t) = \sigma_x^2(0) + \frac{\hbar^2 t^2}{4m\sigma_z^2(0)}$.Was gilt für die Impulsunschärfe? Skizzieren Sie die Lösung für verschiedene Zeiten.

2 (d) Eine Stecknadel (Masse $m = 0,05g$) werde in einem Lichtmikroskop beobachtet. Wie lange dauert es ab dem Ende der Beobachtung etwa, bis die Unschärfe der Position der Stecknadel auf $0,5mm$ angewachsen ist? Gehen Sie von einem normalverteilten Anfangszustand aus. Hinweis: Nutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2+bx} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a} exp\left(\frac{-b^2}{4a}\right)}$ falls $\mathbb{R}(a) < 0$. Bedenken Sie die Normierung der Wellenfunktion! Sie sparen sich Arbeit, wenn Sie Vorfaktoren in den Normierungsfaktor mit einbeziehen.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — randonfurling@lusi.uni-sb.de

24. [*8 Punkte*] **Messprozess II: Zustand und Wahrscheinlichkeitsdichte**

Ein Teilchen befinde sich in einem Zustand $|\psi\rangle$, zu dem eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ gehört.

$\boxed{4}$ (a) Geben Sie den Zusammenhang zwischen $|\psi\rangle$ und $\rho(x)$ an.

$\boxed{4}$ (b) Begründen Sie, warum $|\psi\rangle$ durch Messung von $\rho(x)$ nicht vollständig bestimmt ist. Ist $|\psi\rangle$ vollständig bestimmt, wenn man zusätzlich zu $\rho(x)$ auch noch die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x)$ bestimmt?

25. [*6 Punkte*] **Messprozess III**

Betrachten wir die folgenden Matrixdarstellungen der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ über einem dreidimensionalen Hilbert-Raum:

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ (a) Ein System befindet sich in dem aus der Messung von $\hat{B}$ resultierten Zustand $|b_+\rangle$ bezüglich dem Messwert $b = +1$. Berechnen Sie $\langle \hat{A} \rangle$, $\langle \hat{A}^2 \rangle$ und ΔA bei der nachfolgenden Messung von $\hat{A}$.

$\boxed{3}$ (b) Gegeben sei ein System im Zustand

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

in der Basis, in der $\hat{B}$ diagonal ist. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung, die für die Observable $\hat{B}^2$ das Ergebnis $+1$ ergibt? Wie wahrscheinlich ist dieses Messergebnis?

$\boxed{1}$ (c) Das System befindet sich in einem Zustand, so dass die Wahrscheinlichkeiten für die Messwerte b für $\hat{B}$ durch $P(b = +1) = 1/4$, $P(b = 0) = 1/2$ und $P(b = -1) = 1/4$ gegeben sind. Geben Sie den allgemeinen normierten Zustand an, der mit diesen Wahrscheinlichkeiten kompatibel ist.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de