7. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *7.Juni.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

26. [*12 Punkte*] **Operatoren und Kommutatoren**

(a) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$\boxed{3}$ i.

$$e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}} = \hat{B} + \frac{\lambda}{1!}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{\lambda^3}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \cdots .$$

$\boxed{3}$ ii.

$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda \hat{A}} e^{\lambda \hat{B}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$$

unter der Voraussetzung, dass $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$.

$\boxed{3}$ iii. Für die Operatorfunktion $f(\hat{B})$ und ihre Ableitung $f'(\hat{B})$ nach $\hat{B}$ gilt:

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}] f'(\hat{B}),$$

falls $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$.

$\boxed{3}$ (b) Berechnen Sie

i. e^M mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ii. $e^{ia\frac{\hat{p}}{\hbar}}\, \hat{x}\, e^{-ia\frac{\hat{p}}{\hbar}}$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

iii. $[\hat{x},\, e^{\hat{p}}]$.

($\hat{p}$: Impulsoperator; $\hat{x}$: Ortsoperator).

27. [*6 Punkte*] **Heisenberg Bild**

Berechnen Sie für die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ des harmonischen Oszillators die Heisenberg-Operatoren $\hat{a}^\dagger_H(t)$ und $\hat{a}_H(t)$ auf folgende zwei Arten:

$\boxed{3}$ (a) Verwenden Sie Aufgabe 26 a) mit $\lambda = 1$ bei der Berechnung von $\hat{a}_H(t) = exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)\, \hat{a}\, exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t)$.

$\boxed{3}$ (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{A}_H(t)\right]$$

für $\hat{A}_H = \hat{a}_H$ bzw. $\hat{A}_H = \hat{a}^\dagger_H$ zu den Anfangsbedingungen $\hat{a}_H(0) = \hat{a}$ bzw. $\hat{a}^\dagger_H(0) = \hat{a}^\dagger$.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — randonfurling@lusi.uni-sb.de

28. [*7 Punkte*] **Zeitentwicklung von Operatoren im Heisenberg-Bild**

3 (a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + i\hbar \left(\partial_t \hat{A}_S(t)\right)_H,$$

wobei $\hat{A}_H(t) = \hat{U}_S^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\hat{U}_S(t,t_0)$ und $\hat{U}_S(t,t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator ist. Vergleichen Sie mit der klassischen Bewegungsgleichung für die Funktion $A(q;p;t)$ mit den kanonisch konjugierten Variablen q und p.

4 (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil a) $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ für ein freies Teilchen in einer Dimension, wenn Schrödinger- und Heisenberg-Bild zum Zeitpunkt $t = t_0$ zusammenfallen. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{p}_H(t_1), \hat{p}_H(t_2)]$, $[\hat{p}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$ sowie $[\hat{x}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$.

29. [*8 Punkte*] **Spur eines Operators**

Die Spur eines Operators $\hat{A}$ bezüglich eines vollständigen Orthonormalsystems (VONS) $\{|n\rangle\}$ ist definiert durch:

$$Sp(\hat{A}) = \sum_n \langle n|\hat{A}|n\rangle.$$

(Die Konvergenz der Reihe sei vorausgesetzt. Alle folgenden Aussagen sind beweisbar z.B. für Hilbert-Schmidt-Operatoren, für die gilt: $\sum_{n,m} |\langle n|\hat{A}|m\rangle|^2 < \infty$.)

2 (a) Zeigen Sie, dass die Spur von $\hat{A}$ unabhängig von der Wahl des VONS ist.

2 (b) Berechnen Sie die Spur von $\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$.

2 (c) Berechnen Sie die Spur von $\hat{A}$ bezüglich einer Basis von Eigenzuständen von $\hat{A}$.

2 (d) Zeigen Sie, dass gilt: $Sp(ln(\hat{A})) = ln(det(\hat{A}))$, wobei $det(\hat{A}) = det(\mathbb{A})$ mit: $\mathbb{A}_{nm} = \langle n|\hat{A}|m\rangle$.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — `mape@lusi.uni-sb.de`
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — `randonfurling@lusi.uni-sb.de`