8. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *14.Juni.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

30. [*6 Punkte*] **Heisenberg- und Schrödinger-Bild**

Zeigen Sie, dass ausgehend von einer geeigneten Bewegungsgleichung entweder für Operatoren oder Zustände die Gleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\phi|[A,H]|\psi\rangle$$

sowohl im Schrödinger- als auch im Heisenberg-Bild gültig ist.

31. [*6 Punkte*] **Teilchen im E-Feld**

Der Hamiltonian eines Punktteilchens der Masse m und der Ladung e in einem konstanten elektrischen Feld E ist gegeben durch

$$H(\hat{x},\hat{p}) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 - eE\hat{x}$$

Lösen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für $\hat{x}$ und $\hat{p}$ und geben Sie Ihre Antwort in Termen von $\hat{x}(0)$ und $\hat{p}(0)$ an. Zeigen Sie, dass $H(\hat{x}(t),\hat{p}(t)) = H(\hat{x}(0),\hat{p}(0))$ gilt.

32. [*8 Punkte*] **Messprozess und Übergangswahrscheinlichkeit**

Der Hamiltonian eines quantenmechanischen Systems ist gegeben durch $H_0 + V(t)$, wobei H_0 keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System in einem Eigenzustand $|a\rangle$ von H_0. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung zum Zeitpunkt t das System in einem Eigenzustand $|a'\rangle$ von H_0 zu finden, $|\langle a'|T(t)|a\rangle|^2$ ist. Dabei erfüllt $T(t)$ die Integralgleichung:

$$T(t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \bar{V}(t')T(t')dt', \quad \bar{V}(t) = e^{iH_0t/\hbar}V(t)e^{-iH_0t/\hbar}.$$

33. [*8 Punkte*] **Spur eines Operators II**

Wiederholung (siehe Aufgabe 27): Die Spur eines Operators $\hat{A}$ bezüglich eines vollständigen Orthonormalsystems $\{|n\rangle\}$ ist definiert durch

$$Sp(\hat{A}) = \sum_n \langle n|\hat{A}|n\rangle.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $Sp(\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{A})$ und $Sp([\hat{A},\hat{B}]) = 0$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass für einen Operator $\hat{\rho}(t)$ gilt:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho} = [H,\hat{\rho}] \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}Sp(\hat{\rho}^n) = 0.$$

Überzeugen Sie sich, dass die erste der beiden Gleichungen erfüllt ist, falls $\hat{\rho} = \sum_i p_i\,|\psi_i\rangle\,\langle\psi_i|$ ist und die Zustände $|\psi_i\rangle$ die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung erfüllen und die p_i Konstanten sind. Die $|\psi_i\rangle$ seien nun zusätzlich noch orthonormal. Berechnen Sie $Sp(\hat{\rho}^n)$ in Termen von p_i.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — randonfurling@lusi.uni-sb.de