9. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger
Dr. Julien Randon-Furling

(Abgabe: bis zum *21.Juni.2010, 10:00 Uhr* im Postfach von Prof. Rieger)

34. [*10 Punkte*] Statistische Gesamtheit/Dichteoperator

2 (a) Betrachten Sie die Zustandsvektoren $|V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein vertikal, $|H\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für ein horizontal und $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |H\rangle)$ für ein diagonal polarisiertes Photon. Geben Sie für die reinen Zustände $|V\rangle$, $|H\rangle$ und $|D\rangle$ die Dichtematrizen an. Berechnen Sie die Dichtematrix für das unpolarisierte Gemisch aus 50% vertikal polarisierten und 50% horizontal polarisierten Photonen.

3 (b) Welche der folgenden Operatoren stellen einen akzeptierten Dichteoperator dar? Beschreiben sie einen reinen Zustand oder ein Gemisch? Finden Sie den Zustandsvektor im Fall eines reinen Zustands.

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{pmatrix}$$

$$\hat{W}_3 = \tfrac{1}{3}\,|u\rangle\langle u| + \tfrac{2}{3}\,|v\rangle\langle v| + \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,|u\rangle\langle v| + \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,|v\rangle\langle u|\,, \quad \text{mit } \langle u|u\rangle = \langle v|v\rangle = 1 \text{ und } \langle u|v\rangle = 0.$$

(c) In dieser Teilaufgabe untersuchen wir das zeitabhängige Problem des Dichteoperators.

1 i. In der Vorlesung wurde die Zeitabhängigkeit eines Dichteoperators im Schrödinger-Bild gegeben durch

$$\hat{W}_S(t) = \sum_i w_i\,|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|\,.$$

Geben Sie die Relation zwischen $\hat{W}_S(t)$ und $\hat{W}_S(0)$ mittels des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}$ an. Vergleichen Sie diese mit der Relation für die Zeitentwicklung eines Operators im Heisenberg-Bild $\hat{A}_H(t)$.

2 ii. Geben Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswertes eines Operators $\hat{A}$ in einem durch den Dichteoperator $\hat{W}$ beschriebenen Zustand an.

2 iii. Zeigen Sie, dass ein reiner (gemischter) Zustand im Laufe der Zeit rein (gemischt) bleibt.

Hinweis: Die Bedingung für die Spur des Quadrates der Dichtematrix $\mathrm{Sp}\,\hat{W}^2$ unterscheidet sich für einen reinen und einen gemischten Zustand.

35. [*7 Punkte*] Bahndrehimpulsoperator

$\psi(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$) sei eine Zustandsfunktion in der Ortsdarstellung für ein System ohne Spin-Freiheitsgrad. Die Wirkung des Rotationsoperators auf $\psi(\mathbf{r})$ ist gegeben durch $\hat{D}_{\mathbf{n}}(\alpha)\psi(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r})$, wobei R eine orthogonale Drehmatrix für eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ mit Drehachse $\mathbf{n}$ und Drehwinkel α ist.

3.5 (a) Betrachten Sie eine infinitesimale Drehung um den Winkel ϵ und zeigen Sie, dass für eine derartige Drehung

$$\hat{D}_{\mathbf{n}}(\epsilon) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar}\epsilon\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}} \qquad \text{mit dem Bahndrehimpulsoperator } \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

gilt. Für einen endlichen Drehwinkel α entspricht $\hat{D}_{\mathbf{n}}(\alpha) = e^{-i\alpha\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}/\hbar}$.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 — mape@lusi.uni-sb.de
Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25 — randonfurling@lusi.uni-sb.de

3.5 (b) Zeigen Sie, dass für die Komponenten des Bahndrehimpulsoperators $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ und die Leiteroperatoren, definiert als $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, die folgenden Relationen gelten:

i. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad$ für $i(j,k) = x, y, z$
ii. $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0 \quad$ für $i = x, y, z$
iii. $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$
iv. $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$
v. $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$
vi. $\hat{L}_\pm\hat{L}_\mp = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar\hat{L}_z$

Bemerkung: ε_{ijk} ist das Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls (ijk) eine gerade Permutation von (xyz)} \\ -1 & \text{falls (ijk) eine ungerade Permutation von (xyz)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

36. [*4 Punkte*] **Operatoren**

Sind die unten aufgelisteten Operatoren Vektor-oder Skalaroperatoren? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

$$\hat{\vec{r}}, \quad \hat{\vec{p}}, \quad \hat{\vec{L}}, \quad \hat{\vec{r}}^2, \quad \hat{\vec{p}}^2, \quad \hat{\vec{p}}\hat{\vec{L}}, \quad \hat{\vec{r}}\hat{\vec{p}}$$

37. [*8 Punkte*] **Erhaltungsgrößen**

5 (a) Ein System mit Hamiltonoperator $\hat{H}$ sei invariant unter der Änderung eines kontinuierlichen Parameters α (z.B. Ort, Zeit, Winkel, etc.), d.h. $\langle\psi_{\alpha_1}|\hat{H}|\psi_{\alpha_1}\rangle = \langle\psi_{\alpha_2}|\hat{H}|\psi_{\alpha_2}\rangle$, wobei $|\psi_\alpha\rangle$ der Zustand zum Wert α ist. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}$ dann eine Erhaltungsgröße ist, d.h. sich zeitlich nicht ändert. Gehen Sie davon aus, dass der Zustand analytisch von α abhängt.

3 (b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von $\hat{L}_z$ eine Erhaltungsgröße im harmonischen Oszillator ist.

Martin Peglow, E2.6 Zi.4.23 Julien Randon-Furling, E2.6 Zi.4.25
mape@lusi.uni-sb.de randonfurling@lusi.uni-sb.de