

# Verkehr

Sarah Klein

Universität des Saarlandes

15. Juni 2011



# Gliederung

- 1 Fragestellungen und Probleme
- 2 Definitionen
- 3 Makroskopische Theorien
  - Fluiddynamik
  - Lighthill-Whitham Theorie
- 4 Mikroskopische Theorien
  - Car-following Modell
  - Nagel-Schreckenberg-Modell

# Fundamentale Fragen

- Stabiler Zustand?

# Fundamentale Fragen

- Stabiler Zustand?
- Phasenübergänge?

# Fundamentale Fragen

- Stabiler Zustand?
- Phasenübergänge?
- Falls stabiler Zustand  
→ Zeitentwicklung?

# Fundamentale Fragen

- Stabiler Zustand?
- Phasenübergänge?
- Falls stabiler Zustand  
→ Zeitentwicklung?
- Abhängigkeit von Fluss und Konzentration?

# Probleme

- Keine reproduzierbaren Experimente

# Probleme

- Keine reproduzierbaren Experimente
- Externe Einflüsse

# Probleme

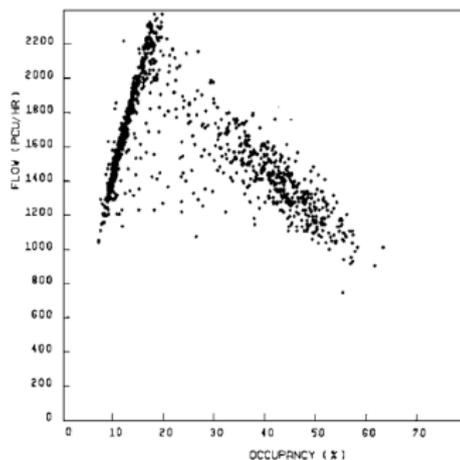
- Keine reproduzierbaren Experimente
- Externe Einflüsse
- Faktor Mensch



[2]

# Fundamentaldiagramm

- Beschreibt Fluss  $J$  in Abhängigkeit der Dichte  $c$
- Maximaler Fluss  
→ Phasenübergang



[1]

- Empirische Daten
- Punkte: Mittelung über 5 Minuten

# Phasen

Ordnungsparameter:  $m = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L n_j n_{j+1}$  mit  $n_i = 0, 1 \forall i = 1, \dots, L$

- Frei-Fluss-Phase  
→ Fahrer kann nahezu mit gewünschter Geschwindigkeit  $\tilde{v}$  fahren
- Gestockte Phase
  - Synchronisierter Verkehr  
→  $v < \tilde{v}$ , aber  $v \neq 0 \forall t$
  - Stop-and-Go  
→ Starke Änderung von  $v$  mit  $t$   
→  $v = 0$  für mehrere Zeitintervalle



Synchronisierter Verkehr [6]



Stop and Go [6]

## 1 Fragestellungen und Probleme

## 2 Definitionen

## 3 Makroskopische Theorien

- Fluiddynamik
- Lighthill-Whitham Theorie

## 4 Mikroskopische Theorien

- Car-following Modell
- Nagel-Schreckenberg-Modell

# Fluiddynamik

Beschreibt Verkehr als eindimensionales kompressibles Fluid  
 → Existieren Konzentration  $c(x, t)$  und Fluss  $J(x, t)$  mit

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{J_{in}} \alpha_i(x - x_i, t) - \sum_{j=1}^{J_{out}} \beta_j(x - x_j, t) \quad (1)$$

- $\alpha_i(x - x_i, t) = \alpha_i^0(t)\phi_i(x - x_i)$  und  $\beta_j(x - x_j, t) = \beta_j^0(t)\phi_j(x - x_j)$
- $\phi_{i,j}(x - x_{i,j})$ : Räumliche W'-Dichte des ein-/ausfließenden Flusses
- $\alpha_i^0(t), \beta_j^0(t)$ : Zeitliche Fluktuationen

**Problem:** 1 Gleichung, 2 Unbekannte

# Lighthill-Whitham Theorie

**Annahme:**  $J(x, t) = j(c(x, t))$

→  $x$ -Abhängigkeit von  $J(x, t)$  ist  $x$ -Abhängigkeit von  $c(x, t)$

bzw. mit  $J = c(x, t)v(x, t)$

$x$ -Abhängigkeit von  $v(x, t)$  ist  $x$ -Abhängigkeit von  $c(x, t)$

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} \underbrace{\left[ v(x, t) + c(x, t) \frac{dv}{dc} \right]}_{=: v_g(c) = \frac{dJ}{dc}} = 0$$

Lösung der Kontinuitätsgleichung:  $c(x, t) = F(x - v_g t)$

→ Dichtewelle mit Gruppengeschwindigkeit  $v_g$

## Diskussion

Sei  $J(c)$  konvex

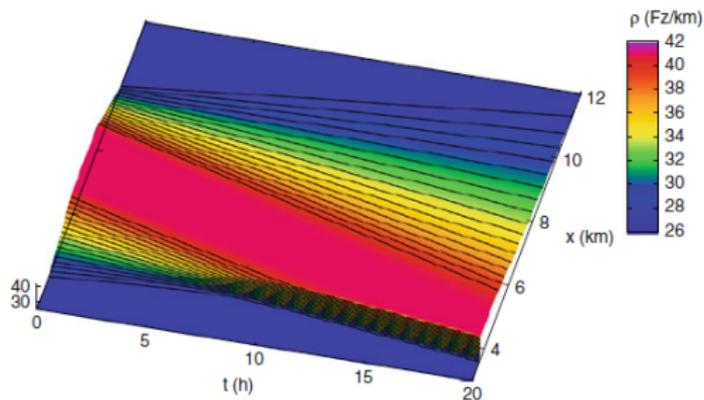
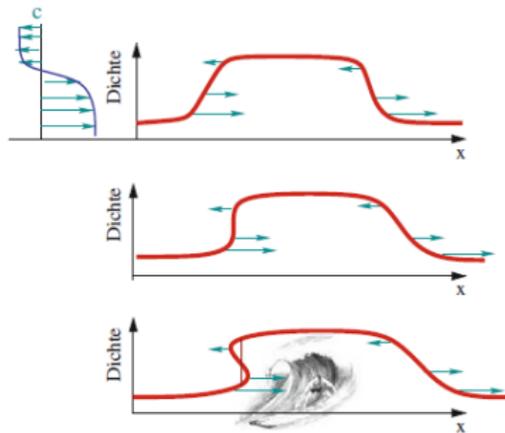
- Gibt Bereiche mit  $\frac{dv_g}{dc} < 0$   
→ Größere  $c$  propagieren schneller als kleinere
- Gibt Bereiche mit  $\frac{dv_g}{dc} > 0$   
→ Größere  $c$  propagieren langsamer als kleinere

⇒ Umordnung der anfänglichen Dichteverteilung

Diskontinuität in  $c$  und somit in  $v$

→ Schockwelle entsteht

# Schockwellen



Ausbildung von Schockfronten durch die Dichteabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten im LW-Modell [4]

Lösung des LW-Modells mit einem Bereich gestauten Verkehrs (rot) mit freiem Verkehr (blau) davor.[4]

- 1 Fragestellungen und Probleme
- 2 Definitionen
- 3 Makroskopische Theorien
  - Fluiddynamik
  - Lighthill-Whitham Theorie
- 4 Mikroskopische Theorien**
  - Car-following Modell
  - Nagel-Schreckenberg-Modell

# Car-following Modell

- Newtonsche Bewegungsgleichung für jedes einzelne Auto
- Reaktion des Fahrers  $\propto$  Erfahrenen Reizen
- Fahrer reagiert durch Beschleunigung oder Abbremsen

$$\ddot{x}_n = f_{Reiz}(v_n, \Delta x_n, \Delta v_n)$$

- $f_{Reiz}$ : Erfahrener Reiz des  $n$ -ten Fahrerers
- $v_n$ : Geschwindigkeit des  $n$ -ten Autos
- $\Delta x_n$ : Abstand zu  $n + 1$ -ten Auto
- $\Delta v_n$ : Geschwindigkeitsdifferenz zum  $n + 1$ -ten Auto

## Follow-the-leader-Modell

$f_{Reiz}$  ist nur von  $\Delta v_n$  abhängig

$$\rightarrow \ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau}(\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t))$$

( $\tau$ : Zeitskalierung  $\simeq$  Empfindlichkeitskoeffizient  $\frac{1}{\mathcal{I}}$ )

**Realistischer:** Fahrer hat Reaktionszeit  $T$

$$\rightarrow \ddot{x}_n(t+T) = \mathcal{I}(\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t))$$

**aber:**

- Keine Abhängigkeit von Abstand zwischen Autos
- Keine Clusterbildung
- Keine Dichteabhängigkeit

## Verbesserungen

- $\mathcal{S}$  hängt von  $\Delta x_n$  ab:

$$\mathcal{S}_n = \frac{\kappa [v_n(t + \tau)]^m}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]^l} \quad m, l, \kappa \text{ Konstanten}$$

→  $N$  nichtlineare gekoppelte DGLn

### Schwachpunkte:

- Viele Parameter, die aus echtem Verkehr bestimmt werden müssen
- Bei Erweiterung auf mehrere Spuren: Fahrer beschleunigt nur bis  $\tilde{v}$

# Optimale-Geschwindigkeits-Modell

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} [\tilde{v}_n(t) - v_n(t)]$$

- $\tilde{v}_n(t)$  hängt von Abstand zu  $n + 1$ -tem Auto ab

$$\rightarrow \tilde{v}_n(t) = v_n^{opt}(\Delta x_n(t))$$

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} [v_n^{opt}(\Delta x_n(t)) - v_n(t)]$$

wobei  $v_n^{opt}(\Delta x_n(t)) \rightarrow 0$  für  $\Delta x_n \rightarrow 0$

$$\rightarrow v_n^{opt}(\Delta x_n(t)): \text{Sichere Geschwindigkeit}$$

## Einschränkungen und Verbesserungen

- Homogene Lösung  $x_n^h = \frac{L}{N}n + v_c t$  muss stabil sein ( $L$ : Straßenlänge,  $N$ : Anzahl Autos,  $v_c$ : konstante Geschwindigkeit)
- Unterscheidung Auto und LKW:

→  $\tau = \tau_n$

- Interaktionen von mehreren Autos:

$$\ddot{x}_n(t) = \sum_{j=-k}^m \mathcal{S}_j \left[ v^{opt} \left( \frac{x_{n+j} - x_n}{j} \right) - v_n \right]$$

# Cellular Automaten

- Diskretisieren von Raum, Zeit und Zuständen eines Systems
- Zelle: Jeder mögliche Punkt im Raum mit endlicher Anzahl von Zuständen
- Feste Regeln für Updaten des Systems in Abhängigkeit von
  - Zustand der Zelle
  - Zustand der benachbarten Zellen
- **hier:**
  - Position, Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung diskret
  - Eindimensionales Gitter mit Besetzungszahl 0 oder 1

# Nagel-Schreckenberg-Modell

- $v_n \in \{0, 1, \dots, v_{max}\}$ ,  $x_n \in \{0, 1, \dots, L - 1\}$
- Abstand zwischen Autos:  $d_n = x_{n+1} - x_n$

Update-Regeln:

1.) **Beschleunigen**  $v_n \rightarrow \min(v_n + 1, v_{max})$

2.) **Abbremsen**  $v_n \rightarrow \min(v_n, d_n - 1)$

3.) **"Trödeln"**  $v_n \rightarrow \max(v_n - 1, 0)$

mit Wahrscheinlichkeit  $p$

4.) **Bewegen** Vorrücken jedes Teilchens mit der neuen Geschwindigkeit:

$$x_n \rightarrow x_n + v_n$$

# Beispiel

Configuration at time  $t$ :



a) Acceleration:



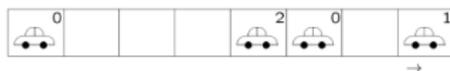
b) Braking:



c) Randomization ( $p = 1/3$ ):



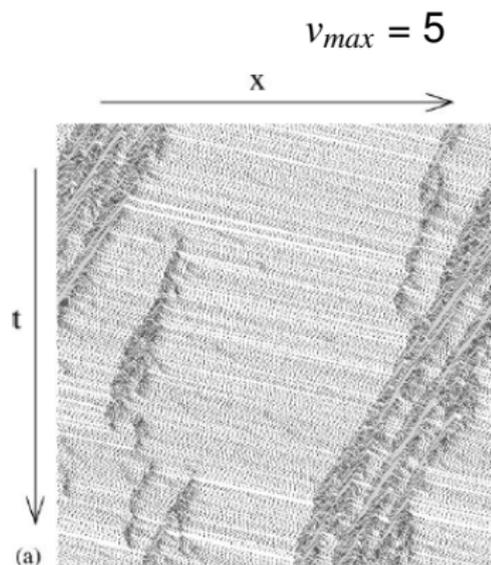
d) Driving (= configuration at time  $t + 1$ ):



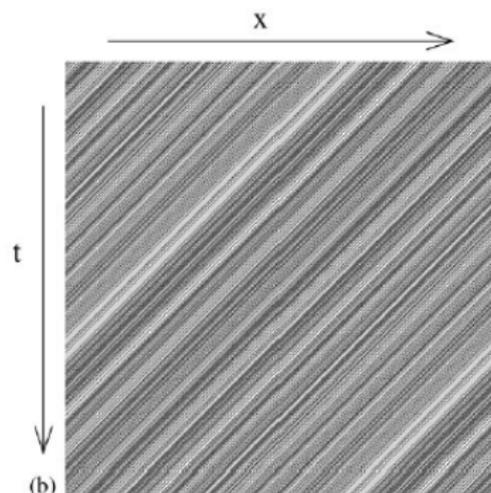
- $v_{max} = 2$

- $p = \frac{1}{3}$

# Einfluss von $p$



a)  $p=0.25, c = 0.2$



b)  $p=0, c=0.5$

# Grenzfälle

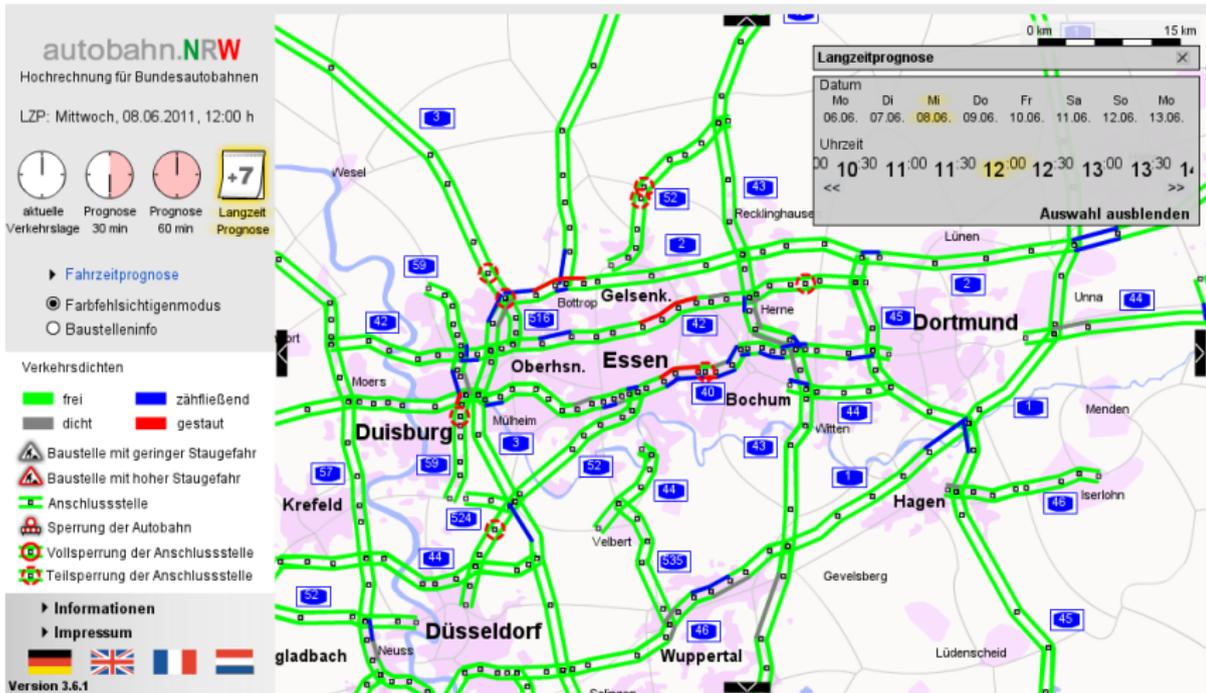
- $p = 0$
- Modell ist deterministisch
- Stationärer Zustand hängt nur von Dichte  $c$  ab
- $J = \min(cv_{max}, 1 - c)$

## Grenzfälle

- $p = 0$ 
  - Modell ist deterministisch
  - Stationärer Zustand hängt nur von Dichte  $c$  ab
  - $J = \min(cv_{max}, 1 - c)$
  
- $p = 1$ 
  - stationärer Zustand für  $v_{max} > 1$  und  $c > c^*$ :  $J = 0$

# Ergebnisse

- “Stau aus dem Nichts“ wird beobachtet
- Ohne Erweiterungen: Kein synchronisierter Verkehr beobachtbar
- Simuliert Verkehr der Schweiz (TRANSIMS) und ist Grundlage der Verkehrsprognose in NRW



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!



## Quellen

- [1] Chowdhury, D., Santen, L., Schadschneider, A., (2000).  
Statistical Physics Of Vehicular Traffic And Some Related  
Systems.  
Physics Reports 329 199-329
- [2] <http://www.abendblatt.de/multimedia/archive/00225>
- [3] <http://www.vollverdummt.de/portal/pics/upload/cartoons>
- [4] Treiber, M., Kesting, A., (2010).  
Verkehrsdynamik und -simulation. Daten, Modelle und  
Anwendungen der Verkehrsflussdynamik.  
Springer Verlag
- [5] [www.autobahn.nrw.de](http://www.autobahn.nrw.de)
- [6] <http://de.wikipedia.org/wiki/Drei-Phasen-Verkehrstheorie>

