12. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

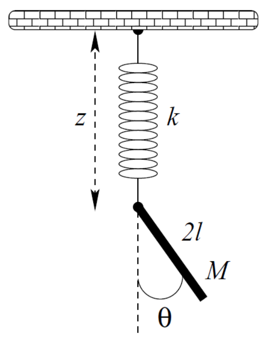
Ihre Lösung ist bis zum 01.07.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

Die Klausur findet am 31. Juli 2014 von 9.00 bis 13.00 im Gebäude E2 2 (Günther-Hotz Hörsaal) statt.

Die Nachklausur findet am 09. Oktober 2014 von 13.15 bis 17.15 im Gebäude E2 2 (Günther-Hotz Hörsaal) statt.

41. [*12 Punkte*] **Stab und Feder**

Ein homogener Stab der Masse M und Länge $2l$ hängt an einem Ende an einer Feder mit Federkonstante k. Die Gleichgewichtslänge der unausgedehnten Feder ohne Gewicht beträgt L. Der Stab kann unter dem Einfluss der Gravitation frei in der vertikalen Ebene schwingen. Die Bewegung der Feder sei auf eine vertikale Schwingung beschränkt.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion des Systems. Verwenden Sie z und θ als generalisierte Koordinaten.

(b) Berechnen Sie die Gleichgewichtslänge der Feder z_0 und den Gleichgewichtswinkel θ_0.

(c) Berechnen Sie die Lagrangefunktion im Grenzfall kleiner Schwingungen, in dem Sie um die Gleichgewichtspositionen $\eta_1 \equiv z - z_0$ und $\eta_2 \equiv \theta - \theta_0$ entwickeln. Berechnen Sie dazu analog zur Vorlesung die symmetrischen 2×2 Matrizen $\hat{T}$ und $\hat{V}$, sodass die Lagrangefunktion in der quadratischen Form

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^T \hat{T} \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2}\vec{\eta}^T \hat{V} \vec{\eta} \tag{1}$$

geschrieben werden kann.

(d) Finden Sie die Normalmoden und die dazugehörigen Frequenzen für kleine Schwingungen des Systems.

42. [*8 Punkte*] **Gedämpfter Oszillator**

Wie in Aufgabe 38 wird wieder der gedämpfte Oszillator betrachtet, in diesem Fall aber ohne Antrieb. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator in Matrixform $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, wobei Ort und Geschwindigkeit des Teilchens die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ sind. Wie sieht die Matrix A aus? Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Diagonalisieren Sie das Problem, sodass es die Form $\dot{\vec{y}} = D\vec{y}$ annimmt, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie die Lösung.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24
astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04
thome@lusi.uni-sb.de

43. [*10 Punkte*] **Berechnung von Frequenzspektren**

Berechnen Sie die Bernoullische Lösung

(a) einer Gitarrensaite mit Länge l, die rechts von der Mitte angezupft wird, sodass die Anfangsbedingungen lauten:

$$\Psi(x,0) = \frac{4A}{3l} \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{3}{4}l \\ 3(l-x) & \text{für } \frac{3}{4}l \leq x \leq l \end{cases}$$

und

$$\dot{\Psi}(x,0) = 0$$

(b) einer Klavierseite mit Länge l, die in der Mitte von einem Klavierhammer der Breite a angeschlagen wird ($a < l$)

und vergleichen Sie die beiden Frequenzspektren.

44. [*10 Punkte*] **Schwingungen einer Membran**

Gegeben sei eine an den vier Rändern fest eingespannte, quadratische Membran der Seitenlänge $a = \pi$. Auf ihr bilden sich transversale Auslenkungsmuster, die der Wellengleichung gehorchen.

(a) Formulieren Sie die Wellengleichung und die Randbedingungen für $\Psi(x, y, t)$.

(b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen der Membran. Welches ist die Grundfrequenz?

(c) Gibt es Entartungen?

(d) Betrachten Sie diejenige Lösung, deren Amplitude durch $\Psi_{13}(x, y) = \sin(3x)\sin(y) + \sin(x)\sin(3y)$ gegeben ist. Skizzieren Sie die Knotenlinie!

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de