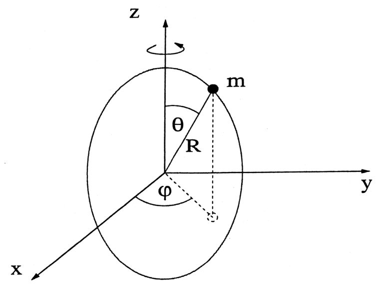
13. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 08.07.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

45. [*17 Punkte*] **Perle auf Draht**

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei auf einem zu einem Kreis mit Radius R gebogenen Draht, der an zwei Stellen von der vertikalen z-Achse berührt wird und um diese mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω unter dem Einfluss der Schwerkraft rotiert.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion. Welche Zwangsbedingungen gelten? Stellen Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung für die Perle auf.

(b) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtslagen in folgenden Schritten:

i. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen, d.h. die Lösung für die $\theta =$ konst. gilt.

ii. Ersetzen Sie den Winkel θ in den Bewegungsgleichungen durch $\theta+\epsilon$, wobei ϵ eine kleine Störung ist. Stellen Sie daraus eine Bewegungsgleichung für ϵ auf.

iii. Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften der verschwindendenen Gleichgewichtslagen einzeln, indem Sie feststellen, ob sich die Perle bei einer kleinen Auslenkung ϵ von θ im Laufe der Zeit weiter von θ entfernt (instabile Gleichgewichtslagen) oder zu θ zurückkehrt (stabile Gleichgewichtslagen).

Hinweis: Es gilt $\sin(\theta+\epsilon) \approx \sin(\theta) + \epsilon\cos(\theta)$ und $\cos(\theta+\epsilon) \approx \cos(\theta) - \epsilon\sin(\theta)$ wenn ϵ eine kleine Störung ist.

(c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie $E = T + V$, die Hamiltonfunktion H und die zeitliche Änderung von beiden Größen. Sind beide Größen erhalten? Nennen Sie kurz den physikalischen anschaulichen Grund dafür.

46. [*7 Punkte*] **Zentralpotential**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Zentralpotential $V(r)$

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion in ebenen Polarkoordinaten, die generalisierten Impulse sowie die Hamiltonfunktion.

(b) Beweisen Sie die Energieerhaltung.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe der Hamiltonfunktion folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= -\frac{\partial}{\partial r} V_{\text{eff}}(r) \\ mr\ddot{\varphi} &= -2m\dot{r}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24
astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04
thome@lusi.uni-sb.de

47. [*5 Punkte*] **relativistisches Teilchen**

Ein freies, relativistisches Teilchen wird durch die Lagrangefunktion beschreiben:

$$L(v) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(a) Bestimmen Sie den generalisierten Impuls.

(b) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $H(p)$.

(c) Zeigen Sie, dass für Photonen verschwindender Ruhemasse $H(p) = pc$ gilt.

(d) Bestimmen Sie L in der Näherung kleiner Geschwindigkeiten und H in der Näherung kleiner Impulse.

48. [*4 Punkte*] **Poisson-Klammer**

Zeigen Sie, dass für eine skalare Funktion φ, die nur von $\vec{r}^{\,2}$, $\vec{p}^{\,2}$ und $\vec{r}\vec{p}$ abhängt, gilt:

$$\{\varphi, L_x\} = \{\varphi, L_y\} = \{\varphi, L_z\} = 0$$

Dabei sind L_x, L_y, L_z die Komponenten des Drehimpulses.

49. [*7 Punkte*] **Erhaltungsgrößen**

(a) Zeigen Sie, dass für zwei Erhaltungsgrößen f und g, die explizit zeitabhängig sind, auch ihre Poisson-Klammer $\{f, g\}$ erhalten ist.

(b) Die Hamiltonfunktion H und eine gegebene Funktion F seien Erhaltungsgrößen eines physikalischen Systems. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\frac{\partial F}{\partial t}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de