14. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 15.07.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Rieger
im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

50. [*6 Punkte*] **kanonische Transformationen**

Prüfen Sie, ob folgende Transformationen kanonisch sind:

(a)

$$P = q\cot p \quad , \quad Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right)$$

(b)

$$P = \frac{\alpha q^2}{2}\left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right) \quad , \quad Q = \arctan\frac{\alpha q}{p}$$

51. [*6 Punkte*] **Erzeugende Funktion der kanonischen Transformation**

Eine kanonische Transformation kann durch eine erzeugende Funktion $F(p,Q)$ angegeben werden, wobei p der alte Impuls und Q die neue Koordinate ist. Finden Sie die kanonische Transformation $(p,q) \mapsto (P,Q)$, die aus den unten angegebenen erzeugenden Funktionen folgen.

(a) $F(p,Q) = -pQ$

(b) $F(p,Q) = -\frac{1}{2}p^2Q^2$

(c) $F(p,Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p$

52. [*8 Punkte*] **kanonische Transformation und Lagrangefunktion**

Welche kanonische Transformation wird von der Funktion

$$F_2(q,P,t) = qP - \Omega(q,t)$$

erzeugt? Bestimmen Sie die neue Hamiltonfunktion $\tilde{H}(Q,P,t)$ und daraus die neue Lagrangefunktion $\tilde{L}(Q,\dot{Q},t)$. Wodurch unterscheiden sich $\tilde{L}(Q,\dot{Q},t)$ und $L(q,\dot{q},t)$?

53. [*12 Punkte*] **Geladenes Teilchen im Magnetfeld**

Bestimmen Sie die Erzeugende $F(x,Q_1,p_y,Q_2)$ um zu zeigen, dass die folgende Transformation kanonisch ist:

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2\right), \quad p_x = \frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2\right), \tag{1}$$

$$y = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2\right), \quad p_y = \frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 - P_2\right), \tag{2}$$

wobei α ein konstanter Parameter ist. Wenden Sie diese Transformation auf das Problem eines Teilchens der Ladung q an, das sich in einer Ebene senkrecht zu einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ bewegt. Drücken Sie die Hamiltonfunktion des Systems in den Koordinaten (Q_i, P_i) aus und wählen Sie den Parameter α gemäß $\alpha^2 = \frac{qB}{c}, B = |\vec{B}|$. Bestimmen Sie aus **dieser** Hamiltonfunktion die Bewegung des Teilchens als Funktion der Zeit.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24
astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04
thome@lusi.uni-sb.de

54. [*8 Punkte*] **Erzeugende von Drehungen**

Gegeben sei die folgende Erzeugende der inifinitesimalen kanonischen Transformation

$$F_2(\{\vec{r}_\alpha\}, \{\vec{p}_\alpha\}) = \sum_\alpha \left[\vec{r}_\alpha \cdot \vec{p}_\alpha + \vec{\varphi} \times \vec{r}_\alpha \cdot \vec{p}_\alpha\right] \ , \ \vec{\varphi} = \epsilon \vec{e} \text{ mit } \epsilon \ll 1$$

(a) Zeigen Sie, dass F_2 eine Drehung der Koordinatenachsen um $-\vec{\phi}$ beschreibt.

(b) Zeigen Sie, dass sich F_2 schreiben lässt als $F_2 = F_2^{(0)} + \epsilon G$. Wie lautet die Erzeugende G? Drücken Sie F_2 mit Hilfe des Gesamtdrehimpulses $\vec{L}$ aus (, wobei Sie Terme der Ordnung ϵ^2 vernachlässigen).

(c) Zeigen Sie: Ist die Drehimpulskomponente $\vec{L} \cdot \vec{e}$ erhalten, so ist H invariant unter einer Rotation des Koordinatensystems um $\epsilon\vec{e}$.
Hinweis: Die durch die Transformation unter F_2 verursachte Änderung der Funktion u ist gegeben durch $\delta u = \epsilon\{u, G\}$.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04
astrid@lusi.uni-sb.de thome@lusi.uni-sb.de