15. Übung

Diese Aufgaben werden in den Übungen am 24.07.2014 und 25.07.2014 besprochen. Zu diesem Blatt müssen Sie keine Lösungen einreichen.

55. [*Präsenzaufgabe*] **Satz von Liouville**

Für die Dichteverteilung $\rho\left(p_i, q_i, t\right)$ im Phasenraum gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

wobei $\vec{v} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3N}, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_{3N})$ die Geschwindigkeiten der Phasenpunkte ist.

(a) Leiten Sie den Satz von Liouville

$$\frac{d\rho}{dt} = \{\rho, H\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung ab.

(b) Wenn generalisierte Kräfte R_i auftreten, die nicht aus einem Potential abgeleitet werden können, lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + R_i.$$

Zeigen Sie mit diesen Gleichung, dass der verallgemeinerte Satz von Liouville lautet:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial R_i}{\partial p_i} = 0$$

(c) Betrachten Sie einen Schwarm von N freien Teilchen, die sich in x-Richtung bewegen und lediglich Reibungskräfte $R_i = -c\dot{x}_i$ mit $i = 1, \ldots, N$ erfahren. Beweisen Sie mit dem verallgemeinerten Satz von Liouville, dass die Verteilungsdichte ρ dieser Gesamtheit exponentiell in der Zeit wächst.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktionaldeterminante D für die zeitliche Entwicklung eines Teilchens aus dem beschrieben Schwarm exponentiell mit der Zeit abfällt. Das bedeutet, dass das von dem Schwarm insgesamt eingenommene Phasenraumvolumen exponentiell abfällt.

56. [*Präsenzaufgabe*] **Hamilton-Jacobi-Gleichung**

Gegeben sei die Hamiltonfunktion

$$H\left(x, p\right) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \lambda \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2}\right)^2$$

für einen Einheitsmassenpunkt ($m = 1$) mit positiven Konstanten ω_0 und λ.

(a) Geben Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für $S\left(x, E, t\right) = W\left(x, E\right) - Et$ explizit an.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $W\left(x, E\right)$ in integraler Form, indem Sie die Substitution $z = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2$ verwenden.

(c) Ermitteln Sie $x = x\left(t\right)$ aus der Bedingung

$$t - \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial E} = \text{konstant}$$

Um was für eine Bewegung handelt es sich?

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24
astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04
thome@lusi.uni-sb.de

57. [*Präsenzaufgabe*] **Sphärisches Pendel**

Beim sphärischen Pendel bewegt sich eine Masse m an einem masselosen, festen Stab der Länge l auf einer Kugeloberfläche. Die Orientierung des Stabes wird durch die Winkel ϑ und φ in sphärischen Koordinaten beschrieben.

(a) Geben Sie die Hamiltonfunktion des sphärischen Pendels an und stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf.

(b) Wählen Sie einen geeigneten Separationsansatz für W an und bestimmen Sie einen Integralausdruck für S.

(c) Folgern Sie daraus formale Lösungen für $\vartheta(t)$ und $\varphi(t)$.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de