2. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 22.04.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen

1. [*10 Punkte*] **Punktmechanik**

Die Bewegung eines Massenpunktes in zwei Raumdimensionen sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -ut\sin(\omega t) \\ ut\cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{mit Konstanten } u, \omega > 0 \;.$$

1 (a) Zeichnen Sie die Bahnkurve qualitativ.

2 (b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$.

2 (c) Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$ der Bahnkurve.

2 (d) Berechnen Sie die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_T$, also den Anteil der Beschleunigung in Richtung $\vec{T}$.

2 (e) Berechnen Sie die Bogenlänge des zurückgelegten Weges $s(t)$.

1 (f) Berechnen Sie $\dot{s}(t)$ und vergleichen Sie mit $|\vec{v}(t)|$.

2. [*10 Punkte*] **Raketengleichung**

Eine Rakete der Masse m_0 starte von der Erde aus senkrecht nach oben. Dabei strömt Gas mit der relativ zur Rakete konstanten Geschwindigkeit $v_{\text{gas}} = 2000\frac{m}{s}$ aus. Die Massenänderung $\frac{dm}{dt} = -0.01 m_0 \cdot \frac{1}{s}$ sei dabei ebenfalls konstant.

3 (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

3 (b) Ermitteln Sie die erreichte Flughöhe in Abhängigkeit von der Zeit.

1 (c) Welche Höhe erreicht die Rakete nach 15 Sekunden?

2 (d) Entwickeln Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für kleine Zeiten. Ist das Ergebnis plausibel?

Hinweis: Setzen Sie eine über die gesamte Flugdauer konstante Schwerebeschleunigung g voraus. Vernachlässigen Sie alle Reibungseffekte.

3. [*7 Punkte*] **Teilchen im Kraftfeld**

Ein Teilchen befinde sich im Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1x_2+x_3} + \sin(x_1+x_2) + x_1\cos(x_1+x_2) + 2x_1x_3^2 \\ x_1 e^{x_1x_2+x_3} + x_1\cos(x_1+x_2) \\ e^{x_1x_2+x_3} + 2x_1^2x_3 \end{pmatrix} \;.$$

3 (a) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ konservativ ist.

4 (b) Bestimmen Sie ein zu $\vec{F}(\vec{x})$ gehörendes Potential $V(\vec{x})$, indem Sie das vektorielle Wegintegral entlang der Gerade von $(0,0,0)$ nach (x,y,z) berechnen.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de

4. [*13 Punkte*] **Kugelkoordinaten**

Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{r}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

mit $r \in \mathbb{R}^+$, $\vartheta \in [0;\pi]$, $\varphi \in [0;2\pi[$.

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung eindeutig ist für alle $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{r} \neq \vec{0}$, indem Sie die Inverse berechnen: $r(x_1,x_2,x_3)$, $\vartheta(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(x_1,x_2,x_3)$

$\boxed{3}$ (b) Berechnen Sie die Tangenteneinheitsvektoren in die Koordinatenrichtungen:

$$\vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \|} \quad , \qquad \vec{e}_\vartheta = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}}{\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} \|} \quad , \qquad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} \|}$$

und zeigen Sie, dass diese Vektoren eine Orthonormalbasis bilden und in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem darstellen.

$\boxed{2}$ (c) Geben Sie ausgehend von einem beliebigen Orts-Zeit-Gesetz $\vec{x}(t) = x_1(t)\cdot\vec{e}_{x_1} + x_2(t)\cdot\vec{e}_{x_2} + x_3(t)\cdot\vec{e}_{x_3}$ den Orts- und den Geschwindigkeitsvektor in der neuen Basis an. Verwenden Sie die Schreibweise $\vec{x} = a\vec{e}_r + b\vec{e}_\vartheta + c\vec{e}_\varphi$ und berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit in den neuen Koordinaten.

$\boxed{5}$ (d) Berechnen Sie die Darstellung des Laplace-Operators

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in Kugelkoordinaten.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 — astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04 — thome@lusi.uni-sb.de