6. Übung

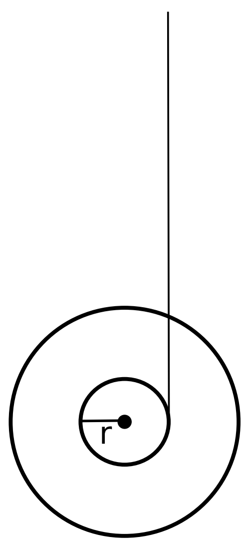
Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 20.05.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Rieger
im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

20. [*10 Punkte*] **Jo-Jo**

Zwei Scheiben stecken starr auf einer gemeinsamen Achse mit Radius r. Auf dieser Achse ist ein Faden, dessen oberes Ende mit der Hand festgehalten wird, aufgewickelt. Das Jo-Jo wird bei gespannter Schnur losgelassen; es wickelt sich ab und gerät in immer schnellere Rotation. Unten angekommen wickelt es sich wieder auf. Das Jo-Jo habe eine Masse m und ein Trägheitsmoment I. Zur Vereinfachung der Rechnung werden vier Annahmen gemacht:

- Die Hand, die das obere Ende des Fadens hält, ist vorerst in Ruhe.
- Das Jo-Jo hat keine horizontale Anfangsgeschwindigkeit.
- Die nicht aufgewickelte Fadenlänge zwischen Hand und Jo-Jo ist wesentlich größer als der Radius r - auch im oberen Umkehrpunkt. Bei ruhender Hand und bei verschwindender horizontaler Anfangsgeschwindigkeit ist der abgewickelte Faden dann immer nahezu senkrecht; es treten keine horizontalen Kräfte und keine pendelartigen Schwingungen auf. Das Jo-Jo bewegt sich nahezu auf einer vertikalen Gerade.
- Der Faden ist masselos, sehr dünn, nicht-dehnbar und sehr leicht biegbar.
- Reibungsverluste können vernachlässigt werden.



(a) Berechnen Sie die Fadenspannung F für den Fall, dass zumindest ein Teil des Fadens auf der Achse aufgewickelt ist.

(b) Berechnen Sie die Fadenspannung F in der Umgebung des unteren Umkehrpunktes, wenn der Faden vollständig abgewickelt ist und das Jo-Jo den Abstieg beendet und den Aufstieg beginnt. Der Drehwinkel liegt dann im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(c) Vergleichen Sie die Fadenkräfte in Teil a) und b) und diskutieren Sie, wie die Reibungsverluste durch Heben und Senken der Hand ausgeglichen werden können.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24
astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04
thome@lusi.uni-sb.de

21. [*10 Punkte*] **Variationsrechnung**

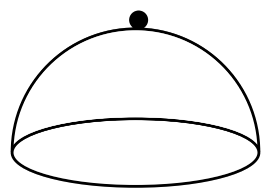
Zeigen Sie, dass in der Ebene die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 eine Gerade ist. Stellen Sie dazu die Länge des Weges zwischen den Punkten durch

$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

dar. Leiten Sie sich einen Ausdruck für das Linienintegral ds in der xy-Ebene her, ermitteln Sie für das Problem $\delta S = 0$ die Euler-Lagrange-Gleichung und lösen Sie sie.

22. [*10 Punkte*] **Teilchen auf einer Halbkugel**

Ein Punktteilchen der Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einer um den Ursprung zentrierten, nach unten geöffneten Halbkugel vom Radius R. Das Teilchen starte dabei im höchsten Punkt der Halbkugel aus der Ruhelage.



(a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion des Systems und bestimmen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

(b) Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren um die Zwangskräfte, die auf das Teilchen wirken, zu bestimmen.

(c) Bei welchem Winkel θ_0 zur z-Achse verliert das Teilchen den Kontakt zur Kugeloberfläche?

23. [*10 Punkte*] **Hypothetische Lagrangefunktion**

Betrachten Sie eine hypothetische Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, die nicht nur von q und $\dot{q}$, sondern auch von $\ddot{q}$ abhängt. Bestimmen Sie aus dem Hamiltonschen Extremalprinzip für die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

bei festgehaltenen $q, \dot{q}$ zu den Zeiten t_1 und t_2 wie in diesem Fall die Lagrangesche Bewegungsgleichung aussieht.

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 — astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04 — thome@lusi.uni-sb.de