7. Übung

Theoretische Physik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 27.05.2014 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Rieger im Erdgeschoß von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

24. [*14 Punkte*] **Lenz-Runge Vektor**

Neben dem Drehimpuls $\vec{L}$ und der Energie E ist für das Keplerproblem auch der Lenz-Runge Vektor

$$\vec{\Lambda} = \frac{1}{m\alpha}\left(\vec{p} \times \vec{L}\right) - \frac{\vec{r}}{r}$$

mit $r = |\vec{r}|$ und der reduzierten Masse $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ eine Erhaltungsgröße.

(a) Zeigen Sie, dass der Lenz-Runge Vektor tatsächlich eine Erhaltungsgröße des Keplerproblems ist.

(b) Berechnen Sie $\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}$ und bestimmen Sie daraus die Bahnkurve $r(\varphi)$.

(c) In welche Richtung zeigt der Lenz-Runge Vektor und welche Bedeutung hat sein Betrag? Begründen Sie Ihre Antwort.

25. [*12 Punkte*] **stabile Bahnen im Zentralpotential**

Das effektive Potential eines Teilchens in einem Zentralpotential ist durch

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Bedingung für stabile Bahnen

$$\frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r=r_0} < -\frac{3}{r_0} f(r_0)$$

lautet, wobei für die Kraft $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ gilt.

(b) Das Potenial habe nun die Form $V(r) = -\alpha r^n$ mit $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$. Für welche Werte von n gibt es stabile Bahnen?

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24
astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04
thome@lusi.uni-sb.de

26. [*14 Punkte*] **Ausgedehnter kugelsymmetrischer Himmelskörper**

Es soll gezeigt werden, dass ein kugelsymmetrischer Himmelskörper im Raum außerhalb seiner Massendichte das Potential eines in seinem Mittelpunkt sitzenden Massenpunkt erzeut. Somit ist es gerechtfertigt für die Berechnung der Plantenbewegung im Keplerproblem von punktförmigen Planeten auszugehen. Gegehen Sie hierfür wiefolgt vor:

Ein ausgedehnter kugelsymmetrischer Himmelskörper mit Radius R am Ort $\vec{x}$ ($x = |\vec{x}|$) habe die Dichteverteilung

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho(x) & x < R \\ 0 & x \geq R \end{cases}$$

und die Gesamtmasse $m = \int \mathrm{d}^3 x \rho(\vec{x})$. Eine kleine, punktförmige Probemasse m_0 am Ort $\vec{y}$ mit $y = |\vec{y}| > R$ spürt das Potential

$$U(\vec{y}) = -G m_0 \int \mathrm{d}^3 x \frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist.

Legen Sie die z-Achse in Richtung von $\vec{y}$ und verwenden Sie Kugelkoorinaten um das Potential $U(\vec{y})$ zu bestimmen.

Bemerkung: Bringen Sie die Integrale auf eine Form, sodass Sie

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \left(x^2 + y^2 - 2xyz\right)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > y \\ \frac{2}{y} & x < y \end{cases}$$

benutzten können. Falls Sie diese Identät verwenden, beweisen Sie ihre Gültigkeit!!!

Dipl. Phys. Astrid Niederle, E2.6 Zi.4.24 astrid@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Christian Thome, E2.6 Zi.1.04 thome@lusi.uni-sb.de