1. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 27.04.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*12 Punkte*] **Fouriertransformation**

3 (a) Zeigen Sie, dass die Deltafunktion durch das Integral folgende Integral dargestellt werden kann:

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{\imath kx}.$$

Hinweis: Führen Sie diese Form der Deltafunktion durch Ergänzung eines quadratischen Terms ($-\varepsilon k^2, \lim\limits_{\varepsilon\to 0}, \varepsilon > 0$) im Exponenten auf die bekannte Darstellung der Deltafunktion

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} a} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad , \quad a > 0$$

zurück.

3 (b) Zeigen Sie, dass eine Fouriertransformation

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\imath kx} f(x)$$

durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{\imath kx} \tilde{f}(k)$$

invertiert wird.

3 (c) Zeigen Sie, dass für die Funktion f und ihre Fouriertransformierte $\tilde{f}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \left|\tilde{f}(k)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left|f(x)\right|^2 \quad .$$

3 (d) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der beiden folgenden Funktionen:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{und} \quad g(x) = e^{-|x|} \quad .$$

Hinweis:

$$I(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2 + \beta x} = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ,$$

auch für komplexe α und β, sofern $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

2. [*4 Punkte*] **Lineare Operatoren und Kommutatoren**

Der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ ist durch $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ gegeben.

2 (a) Drücken Sie den Kommutator $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right]$ der drei linearen Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ durch die Kommutatoren $\left[\hat{A}, \hat{C}\right]$ und $\left[\hat{B}, \hat{C}\right]$ aus.

2 (b) Zeigen Sie die Gültigkeit der Relation

$$\left[\hat{A}^m, \hat{B}\right] = m\hat{A}^{m-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$

falls $\left[\left[\hat{A}, \hat{B}\right], \hat{A}\right] = 0$ für $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de

3. [*9 Punkte*] **Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte für ein Gauß-Wellenpaket**
Gegeben sei ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{N}{b(t)} e^{\imath k_0 (x - r(t))} e^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b^2(t)}} \quad (N \in \mathbb{R})$$

$$\text{mit} \quad r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m} t \quad , \quad b^2(t) = \frac{1}{4a^2} + \imath \frac{\hbar t}{2m} \quad .$$

$\boxed{3}$ (a) Bestimmen Sie N so, dass gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi(x,t)|^2 = 1 \quad .$

$\boxed{3}$ (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ und daraus den Erwartungswert $\langle x \rangle$.

$\boxed{3}$ (c) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$.

4. [*15 Punkte*] **Diagonalisierung hermitischer Matrizen**

$\boxed{5}$ (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender 5×5 Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & \imath & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

$\boxed{5}$ (b) Bestimmen Sie die spurfreie 3×3 Matrix A, deren Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ lauten.

$\boxed{5}$ (c) Die 2×2 Matrix B sei gegeben durch:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2\imath \\ -2\imath & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie $e^{\imath B}$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de