Ihre Lösung ist bis zum 29.06.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*7 Punkte*] **Drehimpulsoperatoren in Kugelkoordinaten**

Bestimmen Sie $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$, $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$ sowie $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ in Ortsdarstellung und verwenden Sie die Kugelkoordinaten r, θ und ϕ.

2. [*11 Punkte*] **Teilchen im rotationssymmetrischen Potential / Kugelflächenfunktionen**

Der Hamiltonoperator für ein spinloses Teilchen der Masse m in einem dreidimensionalen Zentralpotential $V(r) = V(|\boldsymbol{r}|)$ ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(r) \quad . \tag{1}$$

3 (a) Der Operator der kinetischen Energie in (1) lässt sich in einen Radialanteil und einen Winkelanteil zerlegen. Seine Wirkung auf einen Zustandsvektor in der Ortsdarstellung $\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle$ ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{2m}\langle \boldsymbol{r}|\hat{\boldsymbol{p}}^2|\psi\rangle = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2 \boldsymbol{r}\psi = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\langle \boldsymbol{r}|\psi\rangle - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\langle \boldsymbol{r}|\hat{\boldsymbol{L}}^2|\psi\rangle\right) \quad , \tag{2}$$

wobei das Bahndrehimpulsquadrat $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ den Winkelanteil beschreibt. Verifizieren Sie die folgende Relation für den Bahndrehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}}$, den Ortsoperator $\hat{\boldsymbol{r}}$ und den Impulsoperator $\hat{\boldsymbol{p}}$:

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{\boldsymbol{r}}^2\hat{\boldsymbol{p}}^2 - (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2 + \imath\hbar\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \quad .$$

Benutzen Sie diese, um die Relation (2) zu zeigen.

Hinweis: Nützliche Formel für das Levi-Civita-Symbol: $\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

1 (b) Begründen Sie, warum sich die Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator in (1) in der Form $\varphi(\boldsymbol{r}) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ darstellen lassen, wobei $Y_{lm}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,m\rangle$ die Kugelflächenfunktionen als gemeinsame Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ und $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ in Polarkoordinaten sind.

2 (c) Im Gegensatz zu der Quantenzahl eines allgemeinen Drehimpulsoperators $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\cdots$ kann die Quantenzahl l nur ganzzahlige Werte annehmen. Begründen Sie dies.

(d) Die Wellenfunktion des betrachteten Teilchens in $V(r)$ sei durch $\psi(\boldsymbol{r}) = (x + y + 3z)\, f(r)$ gegeben.

3 i. Ist ψ Eigenfunktion zu $\hat{\boldsymbol{L}}^2$? Wenn ja, geben Sie die entsprechende Quantenzahl l an, wenn nein, die möglichen Werte von l bei einer Messung von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$.

2 ii. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an, das Teilchen in verschiedenen m-Zuständen zu finden.

Hinweis: Finden Sie den Zusammenhang zwischen x, y, z und den Kugelflächenfunktionen.

3. [*5 Punkte*] **Virialsatz für das Wasserstoffproblem**

Beweisen Sie für den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r}$$

des Wasserstoffatoms die Operatorbeziehung

$$\frac{\imath}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\right] = 2\hat{T} + \hat{V} \quad .$$

Leiten Sie hieraus eine Relation zwischen den Erwartungswerten $\langle\hat{T}\rangle$ und $\langle\hat{V}\rangle$ für Wasserstoffeigenfunktionen ab und geben Sie $\langle\hat{T}\rangle$ und $\langle\hat{V}\rangle$ an. Was ändert sich, wenn der sphärische harmonische Oszillator mit $V(r) = \mu\omega^2 r^2/2$ betrachtet wird?

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1
bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de

4. [*6 Punkte*] **Erwartungswerte für kugelsymmetrische Syteme**

Berechnen Sie die angegebenen Matrixelemente, wobei $|nlm_l\rangle$ die Energieeigenzustände des Wasserstoffatoms bei Vernachlässigung des Spins bezeichnen.

3 (a) $\langle n=2, l=1, m_l=0|\,\hat{x}\,|n=2, l=0, m_l=0\rangle$.

3 (b) $\langle n=2, l=1, m_l=0|\,\hat{p}_z\,|n=2, l=0, m_l=0\rangle$.

5. [*11 Punkte*] **Zylindersymmetrisches Problem**

Gegeben sei ein zylindersymmetrisches Potential $V(\hat{\rho})$ mit $\hat{\rho} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}$.

2 (a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2M} + V(\hat{\rho})$ sowohl mit der z-Komponente des Bahndrehimpulsoperators $\hat{L}_z$ als auch mit der z-Komponente des Impulsoperators $\hat{p}_z$ vertauscht.

2 (b) Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator in der Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\rho^2}{2M} + \frac{\hat{p}_z^2}{2M} + \frac{\hat{L}_z^2}{2M\rho^2} + V(\hat{\rho}) \quad \text{mit} \quad \hat{p}_\rho^2 = \left(\frac{\hbar}{\imath}\right)^2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$$

schreiben lässt. Beachten Sie dabei, dass $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{\imath}\frac{\partial}{\partial\phi}$ in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) ist.

3 (c) Wählen Sie für die gemeinsamen Eigenfunktionen von $\hat{H}$, $\hat{L}_z$ und $\hat{p}_z$ den Ansatz

$$\psi(\rho, \phi, z) = R(\rho) f(\phi) g(z) \quad ,$$

wobei $f(\phi)$ Eigenfunktion von $\hat{L}_z$ und $g(z)$ Eigenfunktion von $\hat{p}_z$ ist. Zeigen Sie dann, dass $R(\rho)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} + \left(\alpha - \frac{2MV(\rho)}{\hbar^2} - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

mit $\alpha = 2ME/\hbar^2 - k_z^2$ genügt. Hier steht E für die Energieeigenwerte, $\hbar m$ für die Eigenwerte von $\hat{L}_z$ und $\hbar k_z$ für die Eigenwerte von $\hat{p}_z$.

4 (d) Betrachten Sie nun ein freies Teilchen, das in einem unendlich langen Zylinder (Radius r_0) mit hartem Mantel (d. h. $V = \infty$ außerhalb des Zylinders) eingesperrt ist. Es soll ferner $\hat{L}_z = \hat{p}_z = 0$ gelten. Bestimmen Sie $R(\rho)$ mithilfe eines Potenzreihenansatzes $R(\rho) = \sum_{k=0}^\infty a_k \rho^k$ mit $a_1 = 0$ und $a_0 = 1$. Welche Quantisierungsregel für α bzw. E ergibt sich aus der Randbedingung?
Hinweis: Besselfunktion 0. Ordnung: $J_0(x) = \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de