Ihre Lösung ist bis zum 06.07.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*7 Punkte*] **Drehimpulsoperator / Spinoperator / Spinmessung**

Spin ist ein intrinsischer Drehimpuls eines Teilchens. Wir bezeichnen den dazugehörigen Drehimpulsoperator oft auch als Spinoperator $\hat{\boldsymbol{S}}$ und ersetzen die Quantenzahl j durch s. In dieser Aufgabe werde ein Teilchen mit Spin 1/2 betrachtet, z. B. ein Elektron.

$\boxed{4}$ (a) Ein Spin $s = 1/2$ sei in einem Zustand, in dem die z-Komponente des Spins den Wert $+\hbar/2$ hat. Wie lauten die möglichen Messwerte bei einer Messung der Spinkomponente bzgl. einer Richtung, die mit der z-Achse den Winkel θ einschließt? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für diese Messwerte.

$\boxed{3}$ (b) Betrachten Sie den unitären Operator $\hat{D}_z(\theta) = \exp(-\imath\theta\hat{S}_z/\hbar)$. Drücken Sie den Operator $\hat{D}_z^\dagger(\theta)\hat{S}_x\hat{D}_z(\theta)$ durch die Komponenten des Spinoperators $\hat{\boldsymbol{S}}$ aus.

2. [*4 Punkte*] **Addition von Drehimpulsen / Clebsch-Gordan-Koeffizienten**

$\boxed{3}$ (a) Zwei Drehimpulse $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ koppeln zu einem Gesamtdrehimpuls $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2$. Berechnen Sie für $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$ sämtliche Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

$\boxed{1}$ (b) Ein Teilchen mit dem Spin $s = 1/2$ habe den Bahndrehimpuls $l = 1$. Der Gesamtdrehimpuls sei $j = 3/2$ und es sei $m_j = 1/2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der z-Komponente des Spins den Wert $m_s = 1/2$ liefert?

3. [*4 Punkte*] **Deuteriumatom**

Betrachten Sie ein Deuteriumatom bestehend aus einem Atomkern mit Spin $I = 1$ und einem Elektron. Der von dem Elektron herrührende Drehimpuls ist $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$, wobei $\hat{\boldsymbol{L}}$ den Bahndrehimpuls und $\hat{\boldsymbol{S}}$ den Spin des Elektrons bezeichnet. Der Gesamtdrehimplus des Atoms ist $\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{J}} + \hat{\boldsymbol{I}}$, wobei $\hat{\boldsymbol{I}}$ der Spin des Kerns ist. Die Eigenwerte von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{\boldsymbol{F}}^2$ sind $J(J+1)\hbar^2$ bzw. $F(F+1)\hbar^2$. Welche Werte haben die Quantenzahlen J und F für ein Deuteriumatom im $1s$-Grundzustand? Welche Werte haben sie im angeregten $2p$-Zustand?

4. [*25 Punkte*] **Rabi-Oszillationen**

Ein Atomkern mit einem von Null verschiedenen Spin besitzt ein magnetisches Moment, welches in der Quantenmechanik gegeben ist durch den Operator

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma\hat{\boldsymbol{S}} \quad ,$$

wobei $\hat{\boldsymbol{S}}$ der Spinoperator ($\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ mit den Pauli-Matrizen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$) und γ das gyromagnetische Verhältnis ist. Betrachten Sie einen Spin-1/2-Kern, der sich in einem magnetischen Feld $\boldsymbol{B}_0$ parallel zur z-Achse, befindet. Wir können den Hamiltonoperator des Kern-Spins schreiben als

$$\hat{H}_0 = -\hat{\boldsymbol{B}}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_0\hat{\sigma}_z = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z \quad ,$$

wobei $\omega_0 = \gamma B_0$ die Larmorfrequenz ist. In Matrixdarstellung ergibt sich in der Basis, in der $\hat{\sigma}_z$ diagonal ist, $\hat{H}_0$ zu

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad .$$

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de

1 (a) Geben Sie die Energieniveaus des Systems, die dazugehörigen Eigenzustände und die Energielücke zwischen den Niveaus an.

Im Folgenden werde ein periodisches Feld $\boldsymbol{B}_1$, welches parallel zur x-y-Ebene ist, hinzuaddiert:

$$\boldsymbol{B}_1 = B_1(\boldsymbol{e}_x \cos(\omega t) - \boldsymbol{e}_y \sin(\omega t)) \quad .$$

Dies verursacht einen zusätzlichen Beitrag $\hat{H}_1(t)$ zum Gesamthamiltonoperator:

$$\hat{H}_1(t) = -\boldsymbol{B}_1(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_1(\hat{\sigma}_x \cos(wt) - \hat{\sigma}_y \sin(wt)) \quad ,$$

wobei $\omega_1 = \gamma B_1$ die sogenannte Rabifrequenz ist.

Der gesamte Hamiltonoperator ergibt sich also zu:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t) = -\frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{\imath\omega t} \\ \omega_1 e^{-\imath\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad .$$

2 (b) Stellen Sie den Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ als Linearkombination der Basisvektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ wie folgt dar:

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)\,|+\rangle + c_-(t)\,|-\rangle \quad .$$

Welches System von Differentialgleichungen erhält man für die Koeffizienten $c_\pm(t)$?

Im Folgenden definieren wir die Koeffizienten $\gamma_\pm(t)$ als:

$$c_\pm(t) = \gamma_\pm(t) e^{\pm\imath\omega_0 t/2} \quad .$$

1 (c) Betrachten Sie die Fälle $\boldsymbol{B}_1$ gleich Null und ungleich Null und geben Sie eine Bedeutung von $\gamma_\pm(t)$ an.

2 (d) Leiten Sie die folgende Gleichung her:

$$\imath\frac{d\gamma_\pm}{dt} = -\frac{1}{2}\omega_1 e^{\pm\imath\delta t}\gamma_\mp(t) \quad , \qquad (*)$$

wobei die Differenz $\delta = \omega - \omega_0$ zwischen der Frequenz des $\boldsymbol{B}_1$-Feldes und der Lamorfrequenz „Detuning" genannt wird.

3 (e) Lösen Sie Gl. $(*)$ im Resonanzfall $\delta = 0$, wobei für den Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ gelte.

3 (f) Bestimmen Sie mit den gleichen Annahmen wie in (e) die Wahrscheinlichkeit $P_\pm$, den Spin zur Zeit t im Zustand $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ zu finden. Begründen Sie die Aussage: „Das System führt Oszillationen aus." (die sogenannten Rabioszillationen) Zu welchen Zeiten befindet sich der Spin mit Sicherheit im Zustand $|-\rangle$?

2 (g) Betrachten wir nun den Nicht-Resonanzfall ($\delta \neq 0$). Leiten Sie ausgehend von Gl. $(*)$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für γ_+ her.

5 (h) Berechnen Sie $\gamma_+(t)$ mit der Anfangsbedingung $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$, d. h. $\gamma_+(0) = 1$ und $\gamma_-(0) = 0$, in der Form

$$\gamma_+(t) = \lambda_+ e^{\imath\Omega_+ t} + \lambda_- e^{\imath\Omega_- t} \quad ,$$

wobei $\Omega_\pm = \frac{1}{2}(\delta \pm \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2}) = \frac{1}{2}(\delta \pm \Omega)$.

5 (i) Benutzen Sie Gl. $(*)$, um $\gamma_-(t)$ ausgehend von $\gamma_+(t)$ zu berechnen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_-^{(\delta)}$, dass sich ein zu Beginn im Zustand $|+\rangle$ befindlicher Spin zur Zeit t im Zustand $|-\rangle$ befindet.

1 (j) Wie hängt der maximale Wert von $P_-^{(\delta)}$ von δ ab?

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de