12. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 13.07.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.
Klausurtermine: 1. Klausur: Di, 02.08.2016, 9.00 - 12.00 Uhr, Geb. C6 4, gr. HS
2. Klausur: Do, 20.10.2016, 9.00 - 12.00 Uhr, Geb. E2 2, Günter-Hotz-Hörsaal

1. [*6 Punkte*] **Variationsverfahren**

Benutzen Sie als Testfunktion für das attraktive Delta-Potential $V = -aV_0\delta(x)$ eine Gauß-Funktion. Berechnen Sie die obere Schranke für die Grundzustandsenergie E_0 und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit der exakten Lösung.

2. [*8 Punkte*] **Nicht entartete Störungsrechnung**

Der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveau-Systems sei in der Energiedarstellung gegeben durch die 2×2-Matrix

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \quad .$$

Wir betrachten zum Vergleich ein System mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{W} = \hat{H}_0 + \lambda \begin{pmatrix} V_1 & U \\ U^* & V_2 \end{pmatrix} \quad .$$

$\boxed{4}$ (a) Betrachten Sie $\lambda\hat{W}$ als kleine Störung ($0 < \lambda \ll 1$) und berechnen Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ bis zur zweiten Ordnung mittels Störungstheorie.

$\boxed{4}$ (b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ exakt. Zeigen Sie, dass das exakte Resultat im Grenzfall $\lambda\,|W_{ij}| \ll |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ in das Ergebnis aus Teil a) übergeht (W_{ij} bezeichnet die Matrixelemente von $\hat{W}$).

3. [*14 Punkte*] **Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld**

Das Potential eines Oszillators in einem elektrischen Feld $\vec{E} = E_e\vec{e}_x$ lautet

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - qE_e\hat{x} \quad .$$

$\boxed{3}$ (a) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung dieses System.

$\boxed{4}$ (b) Bestimmen Sie störungstheoretisch die Energien bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung für kleines $\lambda := qE_e$.

$\boxed{7}$ (c) Nutzen Sie zur Bestimmung einer oberen Grenze für die Grundzustandsenergie das Variationsverfahren mit dem Variationsparameter x_0.
Der Zustand sei $\varphi_0(x) = c_0 e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(x-x_0)^2}$, wobei $\alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ und $c_0 = (\frac{1}{\pi\alpha^2})^{\frac{1}{4}}$.

i. Zeigen sie hierfür zunächst, dass

$$\langle\varphi_0|\hat{H}|\varphi_0\rangle = x_0^2\frac{m\omega^2}{2} - x_0 qE_e + \frac{m\omega^2\alpha^2}{2} + \frac{\hbar^2}{4m\alpha^2} \quad .$$

ii. Bestimmen Sie nun x_0 und die obere Grenze für die Grundzustandsenergie.

iii. Gibt es Abweichungen zur exakten Lösung? Begründen Sie dies.

4. [*6 Punkte*] **Der anharmonische, eindimensionale Oszillator**

Der Hamiltonoperator eines anharmonischen, eindimensionalen Oszillators sei gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \lambda_1\hat{x}^3 + \lambda_2\hat{x}^4, \quad |\lambda_1|, |\lambda_2| \ll 1 \quad .$$

Gegenüber dem harmonischen Oszillator mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sind die Energieniveaus verschoben. Berechnen Sie die Verschiebung ΔE_n des n-ten Niveaus in erster Ordnung der Störungstheorie.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1
bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de

5. [*6 Punkte*] **Störungsrechnung mit Entartung**

Betrachten Sie ein Quantensystem, welches durch den Hamiltonoperator $\hat{H}_0$ beschrieben wird, der die jeweils zweifach entarteten Eigenwerte ε_1 und ε_2 besitzt. Die Eigenvektoren zu ε_1 seien $\{|1_\alpha\rangle\,,\,|1_\beta\rangle\}$ und die zu ε_2 seien $\{|2_\gamma\rangle\,,\,|2_\delta\rangle\}$. Eine Störung beeinflusst das System, was zu dem folgenden Hamiltonoperator (in der Energiedarstellung von $\hat{H}_0$) führt:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & a & d & 0 \\ a & \varepsilon_1 & b & 0 \\ d & b & \varepsilon_2 & c \\ 0 & 0 & c & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie störungstheoretisch die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ bis zur ersten Ordnung und die Eigenvektoren in nullter Ordnung.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de