2. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 04.05.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*6 Punkte*] **Orthonormierte Funktionen**

Im Raum $\mathcal{L}^2([a,b])$ der komplexwertigen, im reellen Intervall $a \leq x \leq b$ quadratisch integrierbaren Funktionen ist das Skalarprodukt definiert als

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b dx\, f^*(x)g(x), \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^2([a,b]) \quad ,$$

wobei „$*$" für die komplexe Konjugation steht.
Die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ heißen orthonormiert, falls gilt:

$$\langle f_i|f_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls}\, i \neq j \\ 1 & \text{falls}\, i = j \end{cases} \quad .$$

3 (a) Die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators eines Teilchens im unendlich tiefen Potentialtopf mit den Randbedingungen $\psi_n(x=0) = \psi_n(x=L) = 0$ sind gegeben durch

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Zeigen sie, dass die Funktionen ψ_n orthonormiert sind.

3 (b) Sei $\Psi(x)$ eine allgemeine Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ definiert ist und die an den Rändern die Funktionswerte Null besitzt ($\Psi(x=0) = \Psi(x=L) = 0$). Stellen Sie die Funktion $\Psi(x)$ als (unendliche) Linearkombination der Funktionen ψ_n dar. Wie lauten die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten?

2. [*14 Punkte*] **Rand- und Eigenwertproblem**

Wir verwenden wieder das Skalarprodukt aus der vorangegangenen Aufgabe im Raum $\mathcal{L}^2([-\ell,\ell])$. Betrachten Sie einen Unterraum $\mathcal{F}$ derjenigen Funktionen, deren erste und zweite Ableitungen ebenfalls in $\mathcal{L}^2([-\ell,\ell])$ liegen und deren Funktionswerte auf dem Rand von $[-\ell,\ell]$ verschwinden. Es gelte also $f(-\ell) = f(\ell) = 0$. Ferner sei der lineare Operator $\hat{\Delta} \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{F}$ gegeben.

3 (a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Delta}$ in $\mathcal{F}$ hermitesch ist, d. h. $\langle g|\hat{\Delta}\, f\rangle = \langle \hat{\Delta}\, g|f\rangle\,, \forall g, f \in \mathcal{F}$.
Ist der Differentialoperator $\hat{D} \equiv \frac{d}{dx}$ in $\mathcal{F}$ auch hermitesch?

4 (b) Betrachten Sie das Eigenwertproblem von $-\hat{\Delta}$. Es handelt sich also um die Differentialgleichung

$$-\hat{\Delta}\, u = \lambda\, u \quad \text{mit} \quad u \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad . \tag{$*$}$$

Unterscheiden Sie drei Fälle: $\lambda = 0$, $\lambda = -k^2 < 0$ und $\lambda = k^2 > 0$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen für die Fälle, in denen eine nichttriviale Lösung $u(x) \neq 0$ der Gl. ($*$) existiert. Die Eigenfunktion von $-\hat{\Delta}$ zu dem Eigenwert λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) wird als $u_n(x)$ bezeichnet.

3 (c) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen von $-\hat{\Delta}$ orthogonal sind, d. h. $\langle u_n|u_m\rangle = 0$ für $n \neq m$. Skizzieren Sie die Eigenfunktionen zu den drei kleinsten Eigenwerten.

4 (d) Entwickeln Sie $f(x) = x(l - |x|)$ für $-l \leq x \leq l$ in eine Reihe (die Fourierreihe) nach den Eigenfunktionen $u_n(x)$ von $-\hat{\Delta}$. Benutzen Sie die Orthonormalität der Eigenfunktionen, um die Entwicklungskoeffizienten zu bestimmen, wobei alle auftretenden Integrale ohne Nutzung von Integraltabellen oder Computern ausgewertet werden sollen.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1
bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de

3. [*6 Punkte*] **Impulsoperator im Ortsraum**

Der Impulsoperator ist in der Ortsdarstellung gegeben durch $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{\imath}\nabla$.

3 (a) Zeigen Sie, dass für den Kommutator der Orts- und Impulsoperatoren

$$[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = \imath\hbar\delta_{jk}\hat{\mathbb{1}}$$

gilt, wobei $\hat{r}_j$ ($\hat{p}_k$) die x-, y- oder z-Komponente von $\hat{\mathbf{r}}$ ($\hat{\mathbf{p}}$) ist. Zeigen Sie ferner die Vertauschungsregel

$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \quad .$$

Hinweis: Zur Berechnung der Kommutatoren sollten Sie diese immer auf eine Funktion f anwenden, berechnen Sie also $[\hat{A}, \hat{B}]f$.

3 (b) Bestimmen Sie die Kommutatoren

$$[\hat{x}, \hat{p}_x^2] \quad \text{und} \quad [\hat{x}^2, \hat{p}_x^2] \quad .$$

Dabei bezeichnet $\hat{p}_x$ die x-Komponente von $\hat{\mathbf{p}}$ und $\hat{x}$ die x-Komponente von $\hat{\mathbf{r}}$

Hinweis: Verifizieren Sie zuerst die nützliche Kommutatorrelation $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ für drei beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$.

4. [*14 Punkte*] **Zeitentwicklung des Erwartungswerts einer Observable**

4 (a) Der Erwartungswert einer Observable $\hat{A}$ im Zustand ψ wird gegeben durch

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A}\psi \rangle = \int d^3r\, \psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{A}\psi(\mathbf{r}, t) \quad .$$

Zeigen Sie unter Benutzung der Schrödingergleichung, dass die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A} \rangle = \frac{\imath}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle \tag{4.1}$$

gilt, wobei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator ist.

5 (b) Mithilfe der Bewegungsgleichung (4.1) untersuchen wir die Zeitentwicklung der Orts- und Impulsunschärfen eines freien Teilchens der Masse m in einer Dimension. Zeigen Sie, dass die Relationen

$$(\Delta x)_t^2 = (\Delta x)_0^2 + \frac{2}{m}\left[\frac{1}{2}\langle \hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p} \rangle_0 - \langle \hat{x} \rangle_0 \langle \hat{p} \rangle_0\right] t + \frac{(\Delta p)_0^2}{m^2} t^2 \tag{4.2}$$

und

$$(\Delta p)_t^2 = (\Delta p)_0^2 \tag{4.3}$$

gelten, wobei der Index t für einen Zeitpunkt $t > 0$ und der Index 0 für den Zeitpunkt $t = 0$ stehen.

5 (c) Wenden Sie Gl. (4.2) und Gl. (4.3) auf ein Teilchen an, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch das Wellenpaket $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}d}} e^{-\frac{x^2}{2d^2} + \imath k_0 x}$ beschrieben wird. Wie entwickelt sich die Breite des Wellenpakets? Alle auftretenden Integrale sollen ohne Nutzung von Integraltabellen oder Computern ausgewertet werden.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de