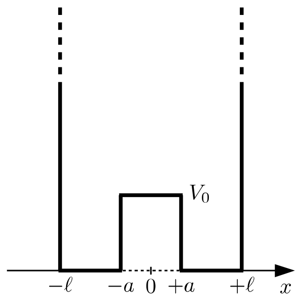
Ihre Lösung ist bis zum 18.05.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*22 Punkte*] **Doppelmuldenpotential / Zweizustandssystem**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem eindimensionalen, unendlich tiefen Potentialtopf, in dessen Mitte sich eine Potentialbarriere der Höhe V_0 befindet:



$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } |x| \geq \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \qquad (*)$$

$$\text{mit } \ell > a > 0.$$

Das Modell beschreibt unter anderem zum Beispiel das N-Atom in einem Ammoniakmolekül (NH_3), wobei die Potentialbarriere zwischen den beiden Mulden die abstoßende Coulombwechselwirkung zwischen dem N-Atom und den H-Atomen repräsentiert.

Hinweis: Die Aufgabenteile (a), (b) und (c) können auch unabhängig voneinander bearbeitet werden, falls Sie einen Aufgabenteil nicht lösen können.

$\boxed{4}$ (a) Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie E_1 für den Fall $V_0 = \infty$. E_1 ist zweifach entartet, es gibt also zwei linear unabhängige Eigenfunktionen zu diesem Energieeigenwert. Bestimmen Sie die beiden normierten Grundzustandswellenfunktionen. Wir bezeichnen die Grundzustände als u_L und u_R, wobei u_L (u_R) für den Zustand steht, in dem das Teilchen sich in der linken (rechten) Mulde befindet.

Hinweis: Sie können die bekannten Lösungen für den unendlich tiefen Potentialtopf benutzen.

(b) Hat die Potentialbarriere eine endliche Höhe, so kann sich das Teilchen durch den Tunneleffekt zwischen beiden Mulden bewegen und die in (a) angesprochene Entartung ist aufgehoben. Wir betrachten das Problem zuerst phänomenologisch und berücksichtigen nur den Zustandsraum, der von den beiden orthogonalen Vektoren $|u_L\rangle$ und $|u_R\rangle$ aufgespannt wird. In der $\{u_L, u_R\}$-Basis hat der Hamiltonoperator $\hat{H}$ die folgende Matrixdarstellung:

$$H = \begin{pmatrix} \langle u_L|\hat{H}|u_L\rangle & \langle u_L|\hat{H}|u_R\rangle \\ \langle u_R|\hat{H}|u_L\rangle & \langle u_R|\hat{H}|u_R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & -\Delta \\ -\Delta & E_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $\Delta > 0$ den Tunneleffekt charakterisiert.

$\boxed{3}$ i. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenzustände als Linearkombinationen von $|u_L\rangle$ und $|u_R\rangle$.

$\boxed{4}$ ii. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand

$$|\varphi(t=0)\rangle = c_L\,|u_L\rangle + c_R\,|u_R\rangle$$

mit $c_L, c_R \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Zustand $|\varphi(t > 0)\rangle$.

$\boxed{3}$ iii. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand $|u_R\rangle$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Zustand $|u_L\rangle$ zu finden, als Funktion von t.

$\boxed{8}$ (c) Betrachten wir die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] v(x) = E v(x)$$

für das in ($*$) angegebene Potential $V(x)$ mit endlichem V_0. Formulieren Sie die Bestimmungsgleichung für die Energieeigenwerte im Fall $E < V_0$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bebla@lusi.uni-sb.de bbogner@lusi.uni-sb.de

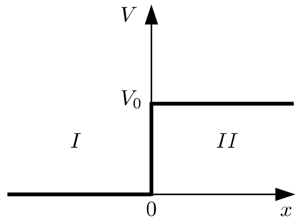
2. [*6 Punkte*] **Streuung an einem beliebig lokalisierten Potential**

Gegeben sei ein Potential

$$V(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ,$$

wobei $f(x)$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b) = 0$ ist. Zeigen Sie mithilfe der Wronskideterminante, dass für die Transmissionskoeffizienten einer von links (l) und einer von rechts (r) einlaufenden Welle gilt: $T_l = T_r$.

3. [*7 Punkte*] **Reflexion und Transmission an einer Potentialstufe**



Wir betrachten die Streuung eines Teilchens an einer eindimensionalen Potentialstufe. Das Potential hat hierbei die Form $V(x) = V_0 \cdot \theta(x)$.

5 (a) Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Streuung eines Teilchens der Energie E. Unterscheiden Sie die Fälle $E > V_0$ und $0 < E < V_0$ und gehen Sie davon aus, dass das Teilchen aus dem negativ-Unendlichen kommt.

2 (b) Betrachten Sie eine Potentialstufe der Höhe $V_0 = 10\,eV$, auf die ein Elektron der Energie $E = 9\,eV$ trifft. Die Wellenfunktion fällt im Bereich II exponentiell ab, weshalb die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons in diesem Bereich von Null verschieden ist. Die Eindringtiefe L eines Teilchens wird definiert als Inverses der Zerfallskonstante λ des exponentiellen Abfalls der Wellenfunktion $\psi(x) = e^{-\lambda x}$. Berechnen Sie die Eindringtiefe L des Elektrons in den Bereich II.

4. [*5 Punkte*] **Kommutator-Identitäten**

Im Rahmen dieser Aufgabe wird eine wichtige Operatoridentität hergeleitet, die in der Quantenmechanik zahlreiche Anwendungen hat, etwa bei der Berechnung von Matrixelementen oder bei der Zeitentwicklung. Der Kommutator zweier linearer Operatoren $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ ist definiert durch

$$[\hat{X}, \hat{Y}] := \hat{X}\hat{Y} - \hat{Y}\hat{X} \quad .$$

$\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien lineare Operatoren, die im selben endlichdimensionalen Hilbertraum wirken.

(a) Die Ableitung eines Operators, der explizit von einem Parameter t abhängt, ist definiert als

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\hat{A}(t+\varepsilon) - \hat{A}(t)}{\varepsilon} \quad .$$

1 i. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\frac{d}{dt}(\hat{A}(t)\hat{B}(t)) = \frac{d\hat{A}(t)}{dt}\hat{B}(t) + \hat{A}(t)\frac{d\hat{B}(t)}{dt}$$

gilt und folgern Sie daraus

$$\frac{d^n}{dt^n}(\hat{A}(t)\hat{B}(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dt^k}\hat{A}(t)\frac{d^{(n-k)}}{dt^{(n-k)}}\hat{B}(t) \quad .$$

2 ii. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\underbrace{[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \ldots [\hat{A}, \hat{B}] \ldots]]]}_{\text{n-mal}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{(n-k)} \hat{A}^k \hat{B} \hat{A}^{(n-k)} \quad .$$

2 (b) Beweisen Sie schließlich:

$$e^{\imath t\hat{A}}\hat{B}e^{-\imath t\hat{A}} = \hat{B} + \imath t[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{(\imath t)^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \ldots + \frac{(\imath t)^n}{n!}[\hat{A}, [\hat{A}, \ldots [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}] \ldots] + \ldots \quad .$$

Hinweis: Führen Sie eine Taylorentwicklung durch und nutzen Sie obige Formel.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de