5. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 25.05.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*9 Punkte*] **Eindimensionaler harmonischer Oszillator**

Der Hamiltonoperator des quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \quad .$$

Bei ihm handelt es sich um ein sehr bedeutendes Modellsystem. Es wird häufig genutzt, um Potentiale in der Umgebung ihrer Minima analytisch zu approximieren (falls die zweite Ableitung dort nicht verschwindet). Der Hamiltonoperator kann in sehr einfacher Form durch die Leiteroperatoren

$$\hat{a} := \frac{m\omega\hat{x} + \imath\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad \text{(Absteigeoperator)} \quad , \quad \hat{a}^\dagger := \frac{m\omega\hat{x} - \imath\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad \text{(Aufsteigeoperator)}$$

ausgedrückt werden: $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Die Eigenwerte des Hamiltonoperators sind $E_n = (n + \frac{1}{2})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

$\boxed{4}$ (a) Wie lauten die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators im Energieeigenzustand $|\Psi_n\rangle$ mit Eigenwert E_n?

$\boxed{5}$ (b) Berechnen Sie die Standardabweichungen von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ im Energieeigenzustand $|\Psi_n\rangle$. Verifizieren Sie mit diesen Werten die Unschärferelation.

2. [*12 Punkte*] **Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators**

Die Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ werden auch als kohärente Zustände bezeichnet:

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad , \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad . \tag{$*$}$$

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass

$$|\alpha'\rangle = N e^{\alpha'\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

ein Eigenzustand von $\hat{a}$ mit Eigenwert $\alpha' \in \mathbb{C}$ ist.

$\boxed{2}$ (b) Schreiben Sie $|\alpha\rangle$ als normierte Superposition der Energieeigenzustände $|n\rangle$.

$\boxed{1}$ (c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, $|n\rangle$ in $|\alpha\rangle$ zu messen, einer Poissonverteilung genügt. Was ist der wahrscheinlichste Wert für n?

$\boxed{2}$ (d) Bestimmen Sie die Unschärfe von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ für den Zustand $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass es sich dabei um die minimal mögliche Unschärfe von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ handelt.

$\boxed{3}$ (e) Zur Zeit $t = 0$ sei ein Teilchen im harmonischen Potential im kohärenten Zustand $|\alpha_0\rangle$. Geben Sie den Zustand des Teilchens für $t > 0$ an. Zeigen Sie, dass sich das Teilchen für alle Zeiten $t > 0$ in einem Zustand der Form $(*)$ mit $\alpha \neq \alpha_0$ befindet und damit weiterhin in einem Eigenzustand zu $\hat{a}$ ist. Bestimmen Sie den Eigenwert α für $t > 0$.

$\boxed{2}$ (f) Beschreiben Sie unter Ausnutzung der bisherigen Ergebnisse, wie sich die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ in einem kohärenten Zustand mit der Zeit ändern. Zeigen Sie weiter, dass kohärente Zustände zu allen Zeiten die minimale Orts-Impuls-Unschärferelation erfüllen.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bebla@lusi.uni-sb.de bbogner@lusi.uni-sb.de

3. [*8 Punkte*] **Anfangswertproblem des harmonischen Oszillators**

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator, der sich zur Zeit $t = 0$ in einem Zustand befindet, der einer Wellenfunktion $\psi(x, 0) = \phi_0(x - x_0)$, wobei $\phi_0(x)$ den Grundzustand des Oszillators darstellt, d. h.

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right] \quad . \tag{1}$$

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar}x_0\hat{p}}\phi_0(x)$$

gilt, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator ist.
Hinweis: Entwickeln Sie die Exponentialfunktion in einer Taylorreihe.

$\boxed{2}$ (b) Schreiben Sie $\psi(x, 0)$ mithilfe des Aufsteigeoperators $\hat{a}^\dagger$ als

$$\psi(x, 0) = e^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger}\phi_0(x) \quad .$$

Hinweis: Nutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$.

$\boxed{2}$ (c) Schreiben Sie $\psi(x, 0)$ als Summe über Eigenzustände ϕ_n des harmonischen Oszillators und berechnen Sie $\psi(x, t)$ mithilfe der allgemeinen Lösungsformel:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\phi_n(x)$$

$\boxed{2}$ (d) Berechnen sie den Erwartungswert $\langle\hat{x}\rangle_t$ des Ortes als Funktion der Zeit.

4. [*6 Punkte*] **Zeitentwicklung eines harmonischen Oszillators**

Betrachtet wird ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Masse m und Frequenz ω beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0(\hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad .$$

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der harmonische Oszillator in seinem Grundzustand.

$\boxed{3}$ (a) Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird die Frequenz des Oszillators „plötzlich" von ω nach $\sqrt{2}\omega$ verändert, sodass das Potential $V_1(\hat{x}) = m\omega^2\hat{x}^2$ ist. Eine Messung der Energie wird zu diesem Zeitpunkt durchgeführt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Oszillator in seinem Grundzustand für $V_1(\hat{x})$ anzutreffen.

$\boxed{3}$ (b) Nach der Änderung des Potentials von V_0 nach V_1 werde keine Messung durchgeführt. Nach einer Zeit τ kehrt das Potential nach V_0 (entspricht der Frequenz ω) zurück. Unter welcher Voraussetzung bzgl. der Größe von τ kehrt der Oszillator mit Sicherheit in den Grundzustand für $V_0(\hat{x})$ zurück?

5. [*5 Punkte*] **Impulsdarstellung**

Betrachten Sie ein Teilchen in 1D, welches sich in einem konstanten Kraftfeld $f(\in \mathbb{R})$ befindet.

$\boxed{3}$ (a) Formulieren Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung. Berechnen Sie die Energieeigenzustände in der Impulsdarstellung $u_E(p) = \langle p|u_E\rangle$. Normieren Sie $u_E(p)$ auf die δ-Funktion: $\langle u_E|u_{E'}\rangle = \delta(E - E')$.

$\boxed{2}$ (b) Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion kann durch den Propagator

$$\psi(x, t) = \int dx'\, K(x, t; x', 0)\psi(x', 0)$$

beschrieben werden. Zeigen Sie, dass der Propagator im Impulsraum die folgende Gestalt hat:

$$K(p, t; p', 0) = \delta(p - p' - ft)e^{i\frac{p'^3 - p^3}{6m\hbar f}} \quad .$$

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 — bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de