Ihre Lösung ist bis zum 01.06.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*8 Punkte*] **Bra-Ket-Notation**

Gegeben sei ein System, das nur gebundene Zustände hat. Ein Teilchen befinde sich in einem beliebigen Zustand, der durch den normierten Vektor $|\psi\rangle$ beschrieben wird. Die Eigenzustände des Operator $\hat{x}$ seien $|x\rangle$, diejenigen des Hamiltonoperators $\hat{H}$ zum Eigenwert E_n seien $|n\rangle$. Zeigen Sie unter Verwendung von $\psi(n) := \langle n|\psi\rangle$, $\psi(x) := \langle x|\psi\rangle$ und $x_{mn} := \langle m|\hat{x}|n\rangle =$ die folgenden Relationen:

1 (a) $\langle \hat{H}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\, |\psi(n)|^2$

1 (b) $\langle \hat{x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, |\psi(x)|^2$

1 (c) $\langle \hat{x}\rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} \psi^*(m)\, \psi(n)\, x_{mn}$

2 (d) $\sum_{m=0}^{\infty}(E_m - E_n)|x_{mn}|^2 = \frac{\hbar^2}{2M}$, M: Teilchenmasse (Thomas-Reiche-Kuhn Summenregel)

1 (e) $\hat{x} = \sum_{m,n=0}^{\infty} x_{mn}\, |m\rangle\langle n|$

1 (f) $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\, |n\rangle\langle n|$

1 (g) Geben Sie eine Interpretation der folgenden Skalarprodukte: $\langle n|\psi\rangle$, $\langle x|\psi\rangle$, $\langle x|n\rangle$, $\langle n|x\rangle$.

2. [*13 Punkte*] **Operatoralgebra**

(a) **Fermioperatoren**

Die Operatoren $\hat{c}$ und $\hat{c}^\dagger$ erfüllen die Antikommutatorrelation $\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} := \hat{c}\hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger\hat{c} = 1$ sowie $\hat{c}^2 = \hat{c}^{\dagger 2} = 0$.

1 i. Zeigen Sie, dass der Teilchenzahloperator $\hat{N} := \hat{c}^\dagger\hat{c}$ nur die Eigenwerte 1 und 0 haben kann.

2 ii. Nehmen Sie die Existenz eines normierten Eigenzustandes $|0\rangle$ von $\hat{N}$ mit Eigenwert 0 an und konstruieren sie einen normierten Eigenzustand $|1\rangle$ von $\hat{N}$ mit Eigenwert 1. Zeigen Sie, dass sich $|0\rangle$ mithilfe von $|1\rangle$ darstellen lässt und geben Sie die Darstellung explizit an.

2 iii. Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle n|\hat{c}|n'\rangle$ und $\langle n|\hat{c}^\dagger|n'\rangle$ (mit $n, n' = 0, 1$) und überprüfen Sie, dass diese Matrizen die richtige Algebra erfüllen.

(b) **Baker-Campbell-Hausdorff-Formel**

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

2 i.
$$e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\lambda\hat{A}} e^{\lambda\hat{B}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$
unter der Voraussetzung, dass $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$.

2 ii. Für die Operatorfunktion $f(\hat{B})$ und ihre Ableitung $f'(\hat{B})$ nach $\hat{B}$ gilt
$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A},\hat{B}] f'(\hat{B}) \quad ,$$
falls $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$.

(c) **Produkt zweier Operatoren**

Die beiden Operatoren $\hat{F}$ und $\hat{K}$ werden in einer beliebigen diskreten Basis durch ihre Matrixelemente dargestellt:
$$\hat{F} = \sum_{n,n'} F_{n,n'}\, |n\rangle\langle n'| \quad , \quad \hat{K} = \sum_{m,m'} K_{m,m'}\, |m\rangle\langle m'| \quad .$$

2 i. Zeigen Sie mit dieser Martixdarstellung, dass $(\hat{F}\hat{K})^\dagger = \hat{K}^\dagger\hat{F}^\dagger$ und bestimmen Sie die Matrixelemente $C_{n,n'}$ im Ausdruck $[\hat{F},\hat{K}] = \sum_{n,n'} C_{n,n'}\, |n\rangle\langle n'|$.

2 ii. Sei der Operator $\hat{F}$ nun hermitesch. Beweisen Sie $\langle \hat{F}^2\rangle \geq 0$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 — bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de

3. [*7 Punkte*] **Spur eines Operators**
Die Spur eines Operators $\hat{A}$ bzgl. eines vollständigen Orthonormalsystems (VONS) $|n_i\rangle$ ist definiert durch:

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}) := \sum_n \langle n|\hat{A}|n\rangle$$

(Die Konvergenz der Reihe sei vorausgesetzt. Alle folgenden Aussagen sind beweisbar z. B. für Hilbert-Schmidt-Operatoren, für die gilt $\sum_{m,n} |\langle m|\hat{A}|n\rangle|^2 < \infty$.)

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass die Spur von $\hat{A}$ unabhängig von der Wahl des VONS ist.

$\boxed{2}$ (b) Berechnen Sie $\mathrm{Tr}([\hat{A}, \hat{B}])$.

$\boxed{1}$ (c) Berechnen Sie die Spur von $\hat{A}$ bzgl. einer Basis von Eigenzuständen von $\hat{A}$.

$\boxed{2}$ (d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}(\ln(\hat{A})) = \ln(\det(\hat{A}))$, wobei $\det(\hat{A}) = \det(\mathbb{A})$ mit $\mathbb{A}_{mn} := \langle m|\hat{A}|n\rangle$.

4. [*6 Punkte*] **Orts-Impuls-Unschärferelation / Wellenpakete minimaler Unschärfe**

$\boxed{2}$ (a) Für das Skalarprodukt zweier beliebiger Wellenfunktionen φ und ψ gilt die *Schwarzsche Ungleichung*

$$\langle\varphi|\varphi\rangle\ \langle\psi|\psi\rangle \geq |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \quad .$$

Sie folgt aus der Tatsache, dass die Norm einer Wellenfunktion nicht negativ ist, sodass $\langle\varphi + \lambda\psi|\varphi + \lambda\psi\rangle \geq 0$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$. Leiten Sie die Schwarzsche Ungleichung her und diskutieren Sie, unter welcher Bedingung Gleichheit erfüllt ist.

$\boxed{2}$ (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung, dass für die Orts- und Impulsunschärfe gilt

$$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad . \tag{$*$}$$

$\boxed{2}$ (c) Für ein minimales Wellenpaket gilt $\Delta x\, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$. Formulieren Sie die Bedingungen für das Gleichheitszeichen in der Relation $(*)$ als eine Differentialgleichung für eine Wellenfunktion, die $\langle\hat{x}\rangle \equiv x_0$ und $\langle\hat{p}\rangle \equiv p_0$ als gegebene Parameter enthält. Bestimmen Sie deren Lösung.

5. [*6 Punkte*] **Zeitentwicklung des Gauß-Pakets / Orts- und Impulsdarstellung**
Gegeben sei die Wellenfunktion eines freien Teilchens in einer Dimension mit dem zugehörigem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$ zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\psi(x', 0) = \frac{1}{(\pi\Delta^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\imath x' \frac{p_0}{\hbar} - \frac{x'^2}{2\Delta^2}\right).$$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte folgender Operatoren zum Zeitpunkt $t = 0$:

$\boxed{2}$ (a) $\hat{x}$

$\boxed{2}$ (b) $\hat{p}$

$\boxed{2}$ (c) $\{\hat{x}, \hat{p}\}$

Verifizieren Sie für jeden Fall, dass die Unschärfe minimal ist.

Hinweis:

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\beta^2/4\alpha}$$

auch für komplexe α und β, sofern $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de