Theoretische Physik III
Quantenmechanik
SS 2016

7. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 08.06.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*8 Punkte*] **Neutrinooszillation**

Neutrinos sind Teilchen sehr geringer Masse, die bei radioaktiven Zerfällen entstehen. Es gibt drei bekannte Arten, von denen jeweils Teilchen und Antiteilchen existieren: Elektron-Neutrino ν_e, Myon-Neutrino ν_μ und Tau-Neutrino ν_τ. Zur Vereinfachung werden wir das Tau-Neutrino ignorieren und das System aus ν_e und ν_μ isoliert behandeln. Entsprechende experimentelle Realisierungen können in Teilchenbeschleunigern mittels π^--Mesonenzerfall (Antipionenzerfall) erzeugt werden:

$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu \quad , \quad \pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e \quad . \tag{1}$$

In der Neutrinophysik werden zwei Basen verwendet:

- Die Eigenzustände $|\nu_e\rangle$ und $|\nu_\mu\rangle$ der schwachen Wechselwirkung.
- Die Eigenzustände $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ des Hamiltonoperators, die durch

$$\hat{H}\,|\nu_1\rangle = E_1\,|\nu_1\rangle \quad \text{und} \quad \hat{H}\,|\nu_2\rangle = E_2\,|\nu_2\rangle \quad \text{mit} \quad E_i = \sqrt{p^2c^2 + m_i^2c^4} \approx pc + p^2c^2 + \frac{m_i^2c^4}{2pc}$$

gegeben sind, wobei m_1 und m_2 die Massen, c die Lichtgeschwindigkeit und p der Impuls sind.

Des Weiteren lässt sich die Geschwindigkeit der Neutrinos sehr gut durch die Lichtgeschwindigkeit c approximieren. Der Zustand der in Gleichung (1) produzierten Teilchen sei durch

$$|\nu_e\rangle = \cos(\theta)\,|\nu_1\rangle + \sin(\theta)\,|\nu_2\rangle \quad , \quad |\nu_\mu\rangle = -\sin(\theta)\,|\nu_1\rangle + \cos(\theta)\,|\nu_2\rangle \tag{2}$$

gegeben, wobei θ ein beliebiger Winkel sei.

(a) Zur Zeit $t = 0$ werde ein Neutrino mit Impuls p im Zustand $|\nu_\mu\rangle$ erzeugt.

2 i. Berechnen Sie den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$.

4 ii. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das Neutrino im Zustand $|\nu_e\rangle$ bei $t > 0$ zu detektieren? Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von θ, c, p, t und $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ an.

1 (b) Die Messung finde im Abstand ℓ vom Entstehungsort statt. Schreiben Sie die obige Wahrscheinlichkeit als Funktion von ℓ.

1 (c) Nehmen Sie den Zustand aus Gleichung (2) für $\theta = \frac{\pi}{4}$ an. In welcher Entfernung ℓ ist die Zahl der detektierten ν_e maximal unter der Annahme, dass $\Delta m^2 c^4 = 1eV^2$ und $pc = 10\,GeV = 10^{10}\,eV$ ist? Geben Sie das Resultat in km an.

2. [*10 Punkte*] **Vollständiger Satz von Operatoren**

In einem dreidimensionalen Hilbertraum seien zwei lineare Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{\,|v_1\rangle\,, |v_2\rangle\,, |v_3\rangle\,\}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\,|v_1\rangle &= 2\,|v_1\rangle \quad , & \hat{B}\,|v_1\rangle &= -\imath\,|v_3\rangle \quad , \\
\hat{A}\,|v_2\rangle &= 3\,|v_2\rangle \quad , & \hat{B}\,|v_2\rangle &= \,|v_2\rangle \quad , \\
\hat{A}\,|v_3\rangle &= 2\,|v_3\rangle \quad , & \hat{B}\,|v_3\rangle &= \imath\,|v_1\rangle \quad .
\end{aligned}$$

1 (a) Geben Sie die Matrizen an, welche den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{\,|v_1\rangle,\,|v_2\rangle,\,|v_3\rangle\,\}$ zugeordnet sind.

2 (b) Was sind die möglichen Messwerte bei der Messung der von $\hat{A}$ beschriebenen Observable? Geben Sie für jeden möglichen Messwert den Zustand an, in den das System nach der Messung übergeht. Beantworten Sie die obigen Fragen auch für die von $\hat{B}$ beschriebene Observable.

3 (c) Existiert ein gemeinsames System von Eigenzuständen von $\hat{A}$ und $\hat{B}$? Falls ja, bestimmen Sie dieses.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 — bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de

2 (d) Eine Menge der kommutierenden hermiteschen Operatoren (Observablen) heißt „vollständiger Satz von Operatoren“, wenn das gemeinsame System von Eigenzuständen eindeutig ist. Welche der folgenden Mengen bilden einen vollständigen Satz: $\{\hat{A}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{A}, \hat{B}\}$, $\{\hat{A}^2, \hat{B}\}$, $\{\hat{A}, \hat{B}^2\}$?

2 (e) Was sind die möglichen Resultate, wenn die Observablen $\hat{A}$ und dann $\hat{B}$ unmittelbar hintereinander gemessen werden? Geben Sie für jedes Resultat (jedes Paar der möglichen Messwerte zu $\hat{A}$ und $\hat{B}$) den Zustand nach der Messung an. Ist die Antwort anders, wenn die Messung von $\hat{B}$ vor der Messung von $\hat{A}$ durchgeführt wird?

3. [*5 Punkte*] **Messprozess I**

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die Operatoren, die zu den Observablen α und β gehören, mit $\hat{A}\,|\varphi_i\rangle = a_i\,|\varphi_i\rangle$ und $\hat{B}\,|\psi_i\rangle = b_i\,|\psi_i\rangle$ $(i = 1, 2)$. $|\varphi_i\rangle$ und $|\psi_i\rangle$ seien orthonormale Eigenzustände. Weiterhin gelte:

$$|\varphi_1\rangle = N_1\big[2\,|\psi_1\rangle + 3\,|\psi_2\rangle\big] \quad , \quad |\varphi_2\rangle = N_2\big[3\,|\psi_1\rangle - 2\,|\psi_2\rangle\big] \quad .$$

1 (a) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten N_1 und N_2.

2 (b) Die Messung der Observable α liefert das Resultat a_1. Daraufhin erfolgt eine Messung der Observablen β. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei der Messung von β die Ergebnisse b_1 bzw. b_2?

2 (c) Im Anschluss daran erfolgt eine erneute Messung der Observablen α. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dieser Messung der Wert a_2 gemessen wird.

4. [*11 Punkte*] **Messprozess II**

Betrachten Sie die folgenden Matrixdarstellungen der Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ über einem dreidimensionalen Hilbertraum:

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\imath & 0 \\ \imath & 0 & -\imath \\ 0 & \imath & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

1 (a) Was sind die möglichen Resultate bei der Messung von $\hat{L}_z$?

2 (b) Berechnen Sie $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$ und $(\Delta \hat{L}_x)^2 = \langle (\hat{L}_x^2 - \langle \hat{L}_x \rangle)^2 \rangle$ in dem Zustand, in dem eine Messung von $\hat{L}_z$ den Wert 1 liefert.

2 (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_z$.

2 (d) Es sei das System in dem Zustand, der zum Eigenwert -1 von $\hat{L}_z$ gehört. Was sind die möglichen Messergebnisse für $\hat{L}_x$ und wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Ergebnisse?

3 (e) Betrachten Sie den Zustand $|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ in der Basis, in der $\hat{L}_z$ diagonal ist. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung, die für die Observable $\hat{L}_z^2$ das Ergebnis $+1$ ergibt? Wie wahrscheinlich ist dieses Messergebnis? Was sind die möglichen Messergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten, wenn $\hat{L}_z$ im Zustand $|\psi\rangle$ gemessen wird?

1 (f) Das System befinde sich in einem Zustand, in dem die Wahrscheinlichkeiten für die Messwerte l_z für $\hat{L}_z$ durch $P(l_z = +1) = \frac{1}{4}$, $P(l_z = 0) = \frac{1}{2}$ und $P(l_z = -1) = \frac{1}{4}$ gegeben sind. Geben Sie den allgemeinen normierten Zustand an, der mit diesen Wahrscheinlichkeiten kompatibel ist.

5. [*6 Punkte*] **Messprozess und Übergangswahrscheinlichkeiten**

Der Hamiltonoperator eines quantenmechanischen Systems sei gegeben durch $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, wobei $\hat{H}_0$ nicht explizit zeitabhängig sei. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System in einem Eigenzustand $|a\rangle$ von $\hat{H}_0$, d. h. $|\psi(t=0)\rangle = |a\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung zum Zeitpunkt t das System in einem Eigenzustand $|a'\rangle$ von $\hat{H}_0$ zu finden, durch $|\,\langle a'|\hat{T}(t)|a\rangle\,|^2$ gegeben ist. Dabei erfüllt $\hat{T}(t)$ die Integralgleichung

$$\hat{T}(t) = 1 - \frac{\imath}{\hbar}\int_0^t dt'\,\hat{\overline{V}}(t')\hat{T}(t') \quad .$$

Hinweis: Wechselwirkungsbild: $|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,|\psi(t)\rangle$ für Zustände, $\hat{\overline{A}}(t) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{A}(t)e^{-\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t}$ für Operatoren.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de