Ihre Lösung ist bis zum 15.06.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*5 Punkte*] **Charakterisierung von 2×2 Dichtematrizen**

3 (a) Zeigen Sie, dass eine 2×2 Matrix ρ, welche die Bedingungen $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$, $\mathrm{Tr}(\rho^2) \leq 1$ und $\rho = \rho^\dagger$ erfüllt, eine Dichtematrix darstellt. Ihre Diagonaleinträge sind also Wahrscheinlichkeiten, das System in bestimmten Zuständen zu finden.

2 (b) Zeigen Sie weiterhin, dass die Bedingungen aus Teil (a) in höherdimensionalen Räumen keine ausreichenden Kriterien mehr dafür sind, dass ρ eine Dichtematrix ist.

2. [*14 Punkte*] **Statistische Gesamtheit/Dichteoperator**

(a) Wir betrachten polarisierte Photonen. Ein vertikal polarisiertes Photon wird durch den Vektor $|V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben, ein horizontal polarisiertes Photon durch den Vektor $|H\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ein diagonal polarisiertes Photon durch den Vektor $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |H\rangle)$.

2 i. Geben Sie die Dichtematrizen der reinen Zustände $|V\rangle$, $|H\rangle$ und $|D\rangle$ an. Berechnen Sie die Dichtematrix eines Gemischs aus 50% vertikal und 50% horizontal polarisierten Photonen.

2 ii. Beschreiben Sie den Aufbau eines (Gedanken-)Experiments, welches eine reine Gesamtheit diagonal polarisierter Photonen und eine gemischte Gesamtheit von Photonen unterscheiden kann.

3 (b) Welche der unten angegebenen Operatoren stellen Dichteoperatoren dar? Beschreiben sie einen reinen Zustand oder ein Gemisch? Ermitteln Sie im Falle eines reinen Zustands den zugehörigen Zustandsvektor.

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix} \quad , \quad W_2 = \begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \frac{1}{3}\,|u\rangle\,\langle u| + \frac{2}{3}\,|v\rangle\,\langle v| + \frac{\sqrt{2}}{3}\,|u\rangle\,\langle v| + \frac{\sqrt{2}}{3}\,|v\rangle\,\langle u|\,, \quad \text{mit } \langle u|u\rangle = \langle v|v\rangle = 1 \text{ und } \langle u|v\rangle = 0,$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad W_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad .$$

(c) Nun betrachten wir zeitabhängige Dichteoperatoren.

2 i. In der Vorlesung wurde die Zeitabhängigkeit eines Dichteoperators im Schrödinger-Bild gegeben durch

$$\hat{W}_S(t) = \sum_i w_i\,|\psi_i(t)\rangle\,\langle\psi_i(t)| \quad .$$

Drücken Sie $\hat{W}_S(t)$ unter Verwendung des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t,0)$ durch $\hat{W}_S(0)$ aus. Vergleichen Sie dies mit der Zeitentwicklung eines Operators $\hat{A}_H(t)$ im Heisenberg-Bild.

3 ii. Geben Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswertes eines Operators $\hat{A}$ in einem durch den Dichteoperator $\hat{W}$ beschriebenen Zustand an.

2 iii. Zeigen Sie, dass ein reiner (gemischter) Zustand im Laufe der Zeit rein (gemischt) bleibt.

Hinweis: Die Bedingung für die Spur des Quadrates der Dichtematrix $\mathrm{Tr}(\hat{W}^2)$ unterscheidet sich für einen reinen und einen gemischten Zustand.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1
bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de

3. [*6 Punkte*] **Von-Neumann Messung im entarteten Fall**

In einem Experiment wird ein Ensemble von Dreizustandssystemen untersucht. Dabei sei jedes System des Ensembles im gleichen Zustand

$$\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad .$$

Im Experiment wird nun der hermiteschen Operator $\hat{B}$ als Messinstrument verwendet, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2\imath & 0 \\ -2\imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

1 (a) Was ist der Erwartungswert dieser Messung?

2 (b) Wie groß ist die Standardabweichung der Messung?

3 (c) Nehmen Sie an, dass eine Messung den Wert 2 ergibt. In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung?

4. [*9 Punkte*] **Zeitentwicklung von Operatoren im Heisenberg-Bild**

3 (a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\imath\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \imath\hbar\Big(\partial_t \hat{A}_S(t)\Big)_H \quad .$$

Dabei ist $\hat{U}_S(t, t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator mit dem $\hat{A}_H(t) = \hat{U}_S^\dagger(t, t_0)\hat{A}_S(t)\hat{U}_S(t, t_0)$ gilt. Wie sieht das alles für ein klassisches System aus, das durch die Hamiltonfunktion H beschrieben wird?

(b) Betrachten Sie nun als Beispiel ein freies Teilchen in einer Dimension:

2 i. Bestimmen Sie $\hat{x}_H(t)$ und $\hat{p}_H(t)$ mit Hilfe von Teil (a), wenn Schrödinger- und Heisenberg-Bild zum Zeitpunkt $t = t_0$ zusammenfallen.

2 ii. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{p}_H(t_1), \hat{p}_H(t_2)]$, $[\hat{p}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$ sowie $[\hat{x}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$.

2 iii. Zur Zeit $t = 0$ sei die Ortsunschärfe des Teilchens $\Delta x_H(0) = \Delta x_0$. Bestimmen Sie $\Delta x_H(t)$ für $t > 0$ aus der Unschärferelation.

5. [*6 Punkte*] **Der harmonische Oszillator im Heisenberg-Bild**

Berechnen Sie für die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ des harmonischen Oszillators die Heisenberg-Operatoren $\hat{a}^\dagger_H(t)$ und $\hat{a}_H(t)$ auf zwei Arten:

3 (a) Gehen Sie direkt von $\hat{a}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{a}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ aus.

3 (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{A}_H(t)\right]$$

für $\hat{A}_H = \hat{a}_H$ bzw. $\hat{A}_H = \hat{a}^\dagger_H$ zu den Anfangsbedingungen $\hat{a}_H(0) = \hat{a}$ bzw. $\hat{a}^\dagger_H(0) = \hat{a}^\dagger$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de