9. Übung

Theoretische Physik (FR 7.1)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 22.06.2016 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*6 Punkte*] Erhaltungsgrößen

4 (a) Ein System mit Hamiltonoperator $\hat{H}$ sei invariant unter der Änderung eines kontinuierlichen Parameters α (z. B. Ort, Zeit, Winkel, etc.), d. h. $\langle\psi_{\alpha_1}|\hat{H}|\psi_{\alpha_1}\rangle = \langle\psi_{\alpha_2}|\hat{H}|\psi_{\alpha_2}\rangle$, wobei $|\psi_\alpha\rangle$ der Zustand zum Wert α ist. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators $\frac{\hbar}{\imath}\frac{\partial}{\partial\alpha}$ dann eine Erhaltungsgröße ist, d. h. sich zeitlich nicht ändert. Gehen Sie davon aus, dass der Zustand analytisch von α abhängt.

2 (b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von $\hat{L}_z$ eine Erhaltungsgröße des harmonischen Oszillators ist.

2. [*12 Punkte*] Bahndrehimpulsoperator

2 (a) Der Operator $\hat{U} = \hat{I} - \imath\varepsilon\hat{F}$ sei unitär. Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{F}$ hermitesch ist. Nehmen Sie dabei an, dass ε eine infinitesimal kleine Zahl ist. Was ist $\hat{F}$ für den Fall, dass $\hat{U}$ der Zeitentwicklungsoperator bzw. der Translationsoperator bzw. der Rotationsoperator ist?

3 (b) $\psi(\boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$) sei eine Zustandsfunktion in der Ortsdarstellung für ein System ohne Spin-Freiheitsgrad. Die Wirkung des Rotationsoperators auf $\psi(\boldsymbol{r})$ ist gegeben durch $\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\alpha)\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(R^{-1}\boldsymbol{r})$, wobei R eine orthogonale Drehmatrix für eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ mit Drehachse $\boldsymbol{n}$ und Drehwinkel α ist. Betrachten Sie eine infinitesimale Drehung um den Winkel ε und zeigen Sie, dass für eine derartige Drehung

$$\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\varepsilon) = \hat{\mathbb{1}} - \frac{\imath\varepsilon}{\hbar}\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$$

gilt mit dem Bahndrehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$. Für einen endlichen Drehwinkel α entspricht $\hat{D}_{\boldsymbol{n}}(\alpha) = e^{-\frac{\imath}{\hbar}\alpha\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}}$. Nehmen Sie zur Vereinfachung der Rechnung an, dass die Drehachse in $\boldsymbol{e}_z$-Richtung zeigt.

4 (c) Zeigen Sie, dass für die Komponenten $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ des Bahndrehimpulsoperators und die Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm \imath\hat{L}_y$ die folgenden Relationen gelten:

i. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$ für $i, j, k = x, y, z$
ii. $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_i] = 0$ für $i = x, y, z$ und $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0$
iii. $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$
iv. $\hat{L}_\pm\hat{L}_\mp = \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar\hat{L}_z$

3 (d) Zeigen Sie des Weiteren:

i. $[\hat{L}_i, \hat{\boldsymbol{p}}^2] = [\hat{L}_i, \hat{\boldsymbol{r}}^2] = 0$
ii. $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\boldsymbol{p}}^2] = [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\boldsymbol{r}}^2] = 0$
iii. $[\hat{L}_i, \hat{H}] = [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{H}] = 0$, falls $\hat{H}$ zentralsymmetrisch ist.
Warum haben $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ eine gemeinsame Eigenbasis?

Hinweis: ε_{ijk} ist das Levi-Civita-Symbol (total antisymmetrische Tensor dritter Stufe):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls (ijk) eine gerade Permutation von (xyz) ist} \\ -1 & \text{falls (ijk) eine ungerade Permutation von (xyz) ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Außerdem gilt $\varepsilon_{jmk}\varepsilon_{ikn} - \varepsilon_{imk}\varepsilon_{ikn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}$.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de

3. [*6 Punkte*] **Messung von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$**

Der Zustand eines Teilchens sei durch folgende Linearkombination der Drehimpulseigenzustände $|l, m\rangle$ mit $l \geq 1$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\big(\,|l,l\rangle + 2\imath\,|l,l-1\rangle + |l,l-2\rangle\,\big) \quad .$$

$\boxed{2}$ (a) Welche möglichen Messwerte haben $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$?

$\boxed{2}$ (b) Wie lauten die Erwartungswerte $\langle\hat{\boldsymbol{L}}^2\rangle$ und $\langle\hat{L}_z\rangle$?

$\boxed{2}$ (c) Wie groß sind die Unschärfen $\Delta\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\Delta\hat{L}_z$ in diesem Zustand?

4. [*4 Punkte*] **Vergleich mit klassischem Drehimpuls**

Zeigen Sie, dass für ein Teilchen mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \hat{V}(r)$ für den Erwartungswert des Drehimpulses in z-Richtung folgende Differentialgleichung gilt:

$$\frac{d}{dt}\,\langle\hat{L}_z\rangle = \langle(\hat{\boldsymbol{r}} \times (-\nabla\hat{V}))_z\rangle \quad .$$

5. [*12 Punkte*] **Elektrisches Quadrupolmoment in elektrischem Feldgradienten**

Betrachten Sie ein System mit dem Drehimpuls $l = 1$, dessen Zustandsraum durch die Basis $\big\{\,|{+1}\rangle\,, |0\rangle\,, |{-1}\rangle\,\big\}$ der gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ (Eigenwerte $2\hbar^2$) und $\hat{L}_z$ (Eigenwerte $+\hbar$, 0 und $-\hbar$) aufgespannt wird. Das System besitze ein elektrisches Quadrupolmoment und sei einem elektrischen Feldgradienten ausgesetzt, sodass sein Hamiltonoperator lautet:

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}\big(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2\big) \quad .$$

Dabei sind $\hat{L}_u$ und $\hat{L}_v$ die Komponenten von $\hat{\boldsymbol{L}}$ bezüglich der Richtungen u und v der x-z-Ebene, die einen Winkel von 45° mit der x- bzw. der z-Achse einschließen. ω_0 ist eine reelle Konstante.

$\boxed{3}$ (a) Geben Sie die Matrix an, die $\hat{H}$ in der Basis $\big\{\,|{+1}\rangle\,, |0\rangle\,, |{-1}\rangle\,\big\}$ beschreibt. Wie lauten die stationären Zustände des Systems sowie die zugehörigen Energien?
Hinweis: Bezeichnen Sie die Zustände mit $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$ und $|E_3\rangle$ in der Reihenfolge fallender Energien.

$\boxed{3}$ (b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|{+1}\rangle - |{-1}\rangle\,\big)$. Wie lautet der Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ zur Zeit t? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messergebnisse einer Messung von $\hat{L}_z$ zur Zeit t.

$\boxed{3}$ (c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{L}_x\rangle_t$, $\langle\hat{L}_y\rangle_t$ und $\langle\hat{L}_z\rangle_t$. Welche Bewegung vollzieht der Vektor $\langle\hat{\boldsymbol{L}}\rangle$?

$\boxed{3}$ (d) Zur Zeit t werde $\hat{L}_z^2$ gemessen.
  - i. Gibt es Zeiten, zu denen nur ein Messergebnis möglich ist?
  - ii. Nehmen Sie an, diese Messung habe $\hbar^2$ ergeben. Wie lautet der Zustand des Systems unmittelbar nach der Messung? Geben Sie ohne Rechnung seine nachfolgende zeitliche Entwicklung an.

Dipl. Phys. Benjamin Blass, E2 6, Zi.1.04.1 bebla@lusi.uni-sb.de
Dipl. Phys. Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de