1. Übung

Ihre Lösung ist in Form einer **Einzelabgabe** bis zum 26.04.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*12 Punkte*] Isingkette

Wir betrachten eine homogene Isingkette der Länge N mit periodischen Randbedingungen in einem externen transversalen Feld h. Die Kopplung zwischen den Spins betrage J. Das System kann durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben werden:

$$\hat{H} = -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_i^x\hat{\sigma}_{i+1}^x - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_i^z \quad .$$

$\hat{\sigma}_i^x$, $\hat{\sigma}_i^y$ und $\hat{\sigma}_i^z$ sind die Pauli-Spinoperatoren in x-, y- bzw. z-Richtung an der Position i.

3 (a) Wie beim harmonischen Oszillator können auch für dieses System Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingeführt werden gemäß:

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_i^x + \imath\hat{\sigma}_i^y\right) \quad , \quad \hat{a}_i = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_i^x - \imath\hat{\sigma}_i^y\right) \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ für gleiche Indices Antikommutator- und für verschiedene Indices Kommutatorrelationen erfüllen:

$$\left\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i\right\} = 1 \quad , \quad \left(\hat{a}_i^\dagger\right)^2 = \left(\hat{a}_i\right)^2 = 0 \quad ,$$

$$\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\right] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j\right] = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad .$$

Aufgrund dieser gemischten Kommutatorrelationen spricht man hier von hard-core Bosonen.

6 (b) Durch die Jordan-Wigner Transformation können die Operatoren $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ in reine Fermioperatoren $\hat{c}_i^\dagger$ und $\hat{c}_i$ überführt werden:

$$\hat{c}_i^\dagger = \hat{a}_i^\dagger \exp\left[-\imath\pi\sum_{j=1}^{i-1}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\right] \quad , \quad \hat{c}_i = \exp\left[\imath\pi\sum_{j=1}^{i-1}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\right]\hat{a}_i \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\hat{c}_i^\dagger$ und $\hat{c}_i$ in der Tat Fermioperatoren darstellen, d. h. zeigen Sie, dass sie den Antikommutatorrelationen genügen:

$$\left\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j\right\} = \delta_{i,j} \quad , \quad \left\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\right\} = \left\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\right\} = 0 \quad .$$

3 (c) Wir führen nun den Teilchenzahloperator $\hat{n}_i^{hcb} = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ für die hard-core Bosonen bzw. $\hat{n}_i^f = \hat{c}_i^\dagger\hat{c}_i$ für die Fermionen ein. Zeigen Sie in beiden Fällen, dass der Teilchenzahloperator für eine bestimmte Position nur die Eigenwerte 0 und 1 hat.

2. [*16 Punkte*] Ortsdarstellung der Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

Wir möchten den quantenmechanischen harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung behandeln. Hierzu führen wir die ortsabhängige Wellenfunktion $\varphi_n(q) = \langle q|n\rangle$ ein bzw. in dimensionslosen Koordinaten $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$.

3 (a) Leiten Sie ausgehend von der Grundzustandswellenfunktion $\varphi_0(x)$ die Differentialgleichung

$$\left(x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0(x) = 0$$

her und bestimmen Sie ihre normierte Lösung.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23
anne.hafner@lusi.uni-sb.de

$\boxed{3}$ (b) Leiten Sie aus der Lösung die höheren Eigenfunktionen her und drücken Sie diese über die Hermite-Polynome $H_n(x)$ aus:

$$H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad .$$

$\boxed{2}$ (c) Zeigen Sie, dass die Hermite-Polynome in der Form

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

geschrieben werden können.

$\boxed{2}$ (d) Untersuchen Sie den Symmetriecharakter der Hermite-Polynome. Was ergibt sich hieraus für die Symmetrie der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators bzw. für die Parität seines Hamiltonoperators?

$\boxed{2}$ (e) Berechnen Sie in der Ortsdarstellung explizit die Wirkung des Erzeugungs- und des Vernichtungsoperators auf $\varphi_n(x)$.

$\boxed{2}$ (f) Zeigen Sie folgende Rekursionseigenschaft der Hermite-Polynome:

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) \quad .$$

$\boxed{2}$ (g) Skizzieren Sie die Eigenfunktionen und Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des harmonischen Oszillators als Funktion des Ortes x für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. [*12 Punkte*] **Der verschobene quantenmechanische harmonische Oszillator**

Wir betrachten nun einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator, der einer zusätzlichen zeitlich konstanten Kraft $\sqrt{2}\gamma\hbar\omega$ ausgesetzt ist.

$\boxed{2}$ (a) Bestimmen Sie das zu der konstanten Kraft gehörige Potential in Ortsdarstellung in Abhängigkeit von x und geben Sie die Schrödingergleichung in Ortsdarstellung an. Führen Sie hierbei die dimensionslose Energie $\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ ein.

$\boxed{2}$ (b) Drücken Sie (ausgehend von der Definition von $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ in Aufgabe 1 (c) auf Blatt 0) x und $\frac{d}{dx}$ über die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus und bringen Sie damit die Schrödingergleichung in die Form

$$\left\{\hat{n} - \gamma\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right)\right\}|\psi\rangle = \varepsilon'\,|\psi\rangle$$

mit $\varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ (c) Wir führen die transformierten Operatoren $\tilde{\hat{b}}^\dagger = \hat{b}^\dagger - \gamma$ und $\tilde{\hat{b}} = \hat{b} - \gamma$, die Wellenfunktion $|\tilde{\psi}\rangle$ sowie die Energie $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + \gamma^2$ ein. Nutzen Sie dies, um die Schrödingergleichung umzuschreiben.

$\boxed{2}$ (d) Welchen Vertauschungsrelationen genügen $\tilde{\hat{b}}^\dagger$ und $\tilde{\hat{b}}$? Nutzen Sie dies, um aus der transformierten Schrödingergleichung unmittelbar Eigenfunktionen und Eigenwerte zu konstruieren. Geben Sie E_n für den verschobenen quantenmechanischen harmonischen Oszillator konkret an.

$\boxed{2}$ (e) Aus den bisherigen Überlegungen ist der Zustand $|\tilde{0}\rangle$ bekannt mit $\tilde{\hat{b}}\,|\tilde{0}\rangle = 0$. Wir sind nun daran interessiert, $|0\rangle$ mit $\hat{b}\,|0\rangle = 0$ zu bestimmen. Zeigen Sie dazu zunächst, dass für eine analytische Funktion f gilt:

$$\left[\hat{b}, f\left(\hat{b}^\dagger\right)\right] = \frac{\partial f\left(\hat{b}^\dagger\right)}{\partial \hat{b}^\dagger} \quad , \quad \left[\hat{b}^\dagger, f\left(\hat{b}\right)\right] = -\frac{\partial f\left(\hat{b}\right)}{\partial \hat{b}} \quad .$$

$\boxed{3}$ (f) Erläutern Sie, weshalb $|\tilde{0}\rangle = f\left(\hat{b}^\dagger\right)|0\rangle$ gilt, und nutzen Sie diese Relation, um ausgehend von $\tilde{\hat{b}}\,|\tilde{0}\rangle = 0$ den Zustand $|0\rangle$ zu bestimmen. Die Normierungskonstante von $f\left(\hat{b}^\dagger\right)$ müssen Sie hierbei nicht explizit angeben.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de