10. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 28.06.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

Vorbemerkung

Die Spinoren

$$\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},s}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{m}{E_p V}}\, u_s(\boldsymbol{p}) e^{-\imath p_\mu x^\mu} = \sqrt{\frac{m}{E_p V}}\, u_s(\boldsymbol{p}) e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_p t)},$$
$$\psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},s}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{m}{E_p V}}\, v_s(-\boldsymbol{p}) e^{+\imath p_\mu x^\mu} = \sqrt{\frac{m}{E_p V}}\, v_s(-\boldsymbol{p}) e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} + E_p t)}$$

stellen die allgemeinen Lösungen der freien Dirac-Gleichung dar. Dabei gilt in natürlichen Einheiten

$$x^\mu = (t, \boldsymbol{x}), \qquad p_\mu = (E_p, -\boldsymbol{p}), \qquad E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}, \qquad s \in \{\uparrow, \downarrow\}.$$

Somit beschreibt beispielsweise $\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t)$ ein Teilchen mit positiver Energie $E = +E_p$, Impuls $\boldsymbol{p}$ und Spin $s = \uparrow$ und $\psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t)$ ein Teilchen mit negativer Energie $E = -E_p$, Impuls $\boldsymbol{p}$ and Spin $s = \uparrow$. Mit der Slash-Notation $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ gilt:

$$u_s(\boldsymbol{p}) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(m+E_p)}}\, u_s(m, \boldsymbol{0}),$$
$$v_s(\boldsymbol{p}) = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(m+E_p)}}\, v_s(m, \boldsymbol{0}),$$

wobei

$$u_\uparrow(m,\boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad u_\downarrow(m,\boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_\uparrow(m,\boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_\downarrow(m,\boldsymbol{0}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Diese sind über Lorentz-Transformation abgeleitet von den Lösungen der Dirac-Gleichung für ein ruhendes Teilchen.

1. [*12 Punkte*] **Orthogonalitätsrelationen der Vierer-Spinoren**

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

$\boxed{5}$ (b) Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelationen

$$\bar{u}_r(\boldsymbol{p})\, u_s(\boldsymbol{p}) = \delta_{rs}\,, \quad \bar{u}_r(\boldsymbol{p})\, v_s(\boldsymbol{p}) = 0\,, \quad \bar{v}_r(\boldsymbol{p})\, v_s(\boldsymbol{p}) = -\delta_{rs}\,, \quad \bar{v}_r(\boldsymbol{p})\, u_s(\boldsymbol{p}) = 0\,,$$

wobei $\bar{u}_r(\boldsymbol{p}) = u_r^\dagger(\boldsymbol{p})\gamma^0$. Verwenden Sie dazu die Definitionen aus der Vorbemerkung.

$\boxed{5}$ (c) Zeigen Sie, dass für die Spinoren $\bar{\psi}\psi$ ein Skalar ist und dass die Dichte $\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi$ hingegen keine Lorentz-Invariante darstellt.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 anne.hafner@lusi.uni-sb.de

2. [*12 Punkte*] **Lorentz-Transformation von Spinoren**

6 (a) Zeigen Sie ausgehend von den Angaben aus der Vorbemerkung, dass die Lösungen der freien Dirac-Gleichung gegeben sind durch

$$\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_p+m} \\ \frac{p_x+\imath p_y}{E_p+m} \end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_pt)}, \quad \psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\downarrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-\imath p_y}{E_p+m} \\ -\frac{p_z}{E_p+m} \end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-E_pt)},$$

$$\psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}} \begin{pmatrix} -\frac{p_z}{E_p+m} \\ -\frac{p_x+\imath p_y}{E_p+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+E_pt)}, \quad \psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},\downarrow}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_pV}} \begin{pmatrix} -\frac{p_x-\imath p_y}{E_p+m} \\ \frac{p_z}{E_p+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\imath(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}+E_pt)}.$$

6 (b) Transformieren Sie den Spinor eines freien Elektrons mit $\boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{e}_x$ in ein mit Geschwindigkeit $v = \beta = p/E_p$ in x-Richtung bewegtes Bezugssystem. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Elektron in Ruhe und überprüfen Sie, ob die Norm erhalten ist.
Hinweis: Nach Vorlesung transformieren sich die Vierer-Spinoren wie

$$\psi' = S\psi \qquad \text{mit} \qquad S = \mathbb{1}\cosh\frac{\eta}{2} - \alpha_x \sinh\frac{\eta}{2}, \qquad \tanh\eta = \beta, \qquad \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}$$

unter Lorentz-Transformation in x-Richtung.

3. [*10 Punkte*] **Ladungskonjugation**

Sei ψ eine Lösung der Dirac-Gleichung

$$\imath\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} - e\boldsymbol{A}) + e\phi + m\hat{\beta}\right]\psi$$

mit skalarem Potential ϕ und Vektorpotential $\boldsymbol{A}$.

5 (a) Zeigen Sie, dass der ladungskonjugierte Zustand $\psi^C = C\psi^\star$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \imath\sigma_y \\ -\imath\sigma_y & 0 \end{pmatrix}$$

die Dirac-Gleichung mit entgegengesetzter Ladung erfüllt:

$$\imath\frac{\partial\psi^C}{\partial t} = \left[\hat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) - e\phi + m\hat{\beta}\right]\psi^C.$$

5 (b) Die Wellenfunktion $\psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},s}(\boldsymbol{x},t)$ beschreibt ein Teilchen mit positiver Energie, Impuls $\boldsymbol{p}$ und Spin s, während $\psi^{(-)}_{\boldsymbol{p},-s}(\boldsymbol{x},t)$ einem Teilchen mit negativer Energie, Impuls $-\boldsymbol{p}$ und Spin $-s$ entspricht. Ziel der Ladungskonjugation ist es eine Beziehung zwischen dem Zustand mit negativer Energie und dem des Antiteilchens herzustellen. Zeigen Sie mit Hilfe der Darstellung aus Aufgabe 2 (a), dass gilt:

$$\left[\psi^{(-)}_{\boldsymbol{p},\downarrow}(\boldsymbol{x},t)\right]^C = \psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},\uparrow}(\boldsymbol{x},t).$$

4. [*6 Punkte*] **Herleitung der Dirac-Gleichung aus der Lagrange-Dichte**

Betrachten Sie die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(\imath\gamma^\mu\delta_\mu - m)\psi(x).$$

Dabei ist $\psi(x)$ ein komplexwertiges Feld.

3 (a) Zeigen Sie, dass es sich bei obiger Lagrange-Dichte um die Lagrange-Dichte eines komplexwertigen Dirac-Feldes handelt, indem Sie zeigen, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen den Dirac-Gleichungen entsprechen.

3 (b) Bestimmen Sie die konjugierten Felder $\pi(x)$ und $\bar{\pi}(x)$ sowie die Hamilton-Funktion H.

BENJAMIN BOGNER, E2 6, Zi.4.27 ANNE HAFNER, E2 6, Zi.4.23
bbogner@lusi.uni-sb.de anne.hafner@lusi.uni-sb.de