11. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 05.07.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*10 Punkte*] Kleinsches Paradoxon

Wir betrachten die Streuung eines Dirac-Teilchens mit relativistischem Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + m\hat{\beta} + U(z)$$

an der Potentialstufe $U(z) = V\theta(z)$. Das einlaufende Teilchen bewegt sich mit dem Impuls $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$ in positive z-Richtung, sodass sein Spinor geschrieben werden kann als

$$\psi_{ein}(z) = e^{\imath kz}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

2 (a) Stellen Sie Ansätze für die Spinoren der reflektierten Welle $\psi_{refl}(z)$ und der transmittierten Welle $\psi_{trans}(z)$ auf.

4 (b) Wir nehmen an, dass die Potentialschwelle den Spin erhält. Zeigen Sie, dass dann aus der Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion am Punkt $z = 0$ folgt

$$\psi_{trans}(z) \propto e^{\imath qz}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad q = \sqrt{(E-V)^2 - m^2} \quad .$$

4 (c) Welches Verhalten zeigt $\psi_{trans}(z)$ im Fall $|E-V| < m$, welches im Fall $|E-V| > m$? Begründen Sie Ihre Antwort. Betrachten Sie dazu auch das Verhältnis von einlaufendem zu auslaufendem und transmittiertem Wahrscheinlichkeitsstrom. Wie erklärt sich, dass im Fall $|E-V| > m$ scheinbar mehr Teilchen reflektiert werden als einlaufen?

2. [*6 Punkte*] Neutrinos

Neutrinos sind Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen und wurden über lange Zeit hinweg als masselos angesehen. Heutzutage mehren sich experimentelle Hinweise darauf, dass sie eine endliche, wenn auch sehr kleine Ruhemasse besitzen. Im Grenzfall großer Impulse ist es jedoch zulässig, sie durch die masselose Dirac-Gleichung zu beschreiben. Zur Lösung der masselosen Dirac-Gleichung bietet sich ein Übergang in die chirale Darstellung an. Dieser Übergang erfolgt gemäß $\psi^{ch} = U\psi$ und $\gamma^{\mu\,ch} = U\gamma U^\dagger$ mit der Transformation $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{1} + \gamma^0\gamma^5\right)$.

3 (a) Bestimmen Sie $U^\dagger$ sowie die Darstellung der γ-Matrizen in der chiralen Basis.

3 (b) Geben Sie die Dirac-Gleichung in chiraler Darstellung an mit dem Spinor $\psi^{ch} = \begin{pmatrix} \psi_1^{ch} \\ \psi_2^{ch} \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass für $m = 0$ die Gleichungen für ψ_1^{ch} und ψ_2^{ch} entkoppeln. Diese entkoppelten Gleichungen werden als Weyl-Gleichungen bezeichnet.

Anmerkung:
Experimentell zeigt sich, dass in der Natur nur Neutrinos mit negativer Chiralität existieren. Dies bedeutet, dass nur die Gleichung für ψ_2^{ch} relevant ist.

3. [*12 Punkte*] Eigenschaften des reelles Klein-Gordon-Feld

Das reelle Klein-Gordon-Feld beschreibt ungeladene Teilchen, die Feldoperatoren können daher als

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left[\hat{b}_{\boldsymbol{k}} e^{\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \hat{b}_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)}\right] \quad , \quad \omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$$

geschrieben werden, wobei $\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$ und $\hat{b}_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ bosonischen Vertauschungsrelationen gehorchen.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de

6 (a) Leiten Sie mit Hilfe des Residuensatzes her, dass für den Kommutator zweier Feldoperatoren $\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{\phi}(\boldsymbol{r}',t')$ die Beziehnung

$$\left[\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t),\hat{\phi}(\boldsymbol{r}',t')\right] = \begin{cases} = 0 & \text{für } |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| > |t-t'| \\ \neq 0 & \text{für } |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \leq |t-t'| \end{cases}$$

gilt. Also sind $\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{\phi}(\boldsymbol{r}',t')$ für $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| > |t-t'|$ unabhängig - sie können sich nicht gegenseitig beeinflussen. Damit ist Mikro-Kausalität gewährleistet, da Signale sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können (n.b. hier c=1).

2 (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ und $\hat{\phi}(\boldsymbol{r}',t')$ nicht unabhängig sind, wenn $\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$ und $\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ Antikommutatorelationen genügen.

2 (c) Zeigen Sie, dass der Vakuumserwartungswert des Feldoperators $\langle 0|\,\hat{\phi}\,|0\rangle = 0$ verschwindet, während $\langle 0|\,\hat{\phi}^2\,|0\rangle$ divergiert.

2 (d) Weisen Sie nach, dass durch Einführung von Normalordnung, das heißt die Erzeuger stehen links von den Vernichtern, der Beitrag der divergenten Nullpunktsenergie eliminiert werden kann. Der Normalordnungsoperator :: ist definiert durch $:\hat{b}_{\boldsymbol{k}}\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}: = \hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$ beziehungsweise $:\hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{b}_{\boldsymbol{k}}: = \hat{b}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\hat{b}_{\boldsymbol{k}}$.

4. [*12 Punkte*] **Komplexes Klein-Gordon-Feld**

In zweiter Quantisierung wird die allgemeine Lösung $\phi(x^\mu)$ der Klein-Gordon-Gleichung zu dem Feldoperator

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int d^3p\, \frac{1}{\sqrt{2VE_{\mathbf{p}}}}\left(\hat{a}_{\mathbf{p}}e^{-\imath p_\mu x^\mu} + \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}e^{\imath p_\mu x^\mu}\right) \quad .$$

Die Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}}$ genügen den Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \quad , \quad \left[\hat{b}_{\mathbf{p}},\hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$$

sowie

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}},\hat{a}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}},\hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}},\hat{b}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}},\hat{b}^\dagger_{\mathbf{q}}\right] = \ldots = 0 \quad .$$

3 (a) Bestimmen Sie den zu $\hat{\phi}(x^\mu)$ kanonisch konjugierten Operator $\hat{\pi}(x^\mu) \equiv \partial_0\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)$ und zeigen Sie, dass $\hat{\phi}(x^\mu)$ und $\hat{\pi}(x^\mu)$ für $t = t'$ folgender Vertauschungsrelation genügen:

$$\left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\pi}(x'^\mu)\right] = \imath\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad .$$

3 (b) Die Klein-Gordon-Gleichung ist die Bewegungsgleichung, die sich aus der Lagrange-Dichte für ein Skalarfeld

$$\hat{\mathcal{L}}_{KG}\left[\hat{\phi}(x^\mu), \partial^\nu\hat{\phi}(x^\mu)\right] = \left(\partial_\nu\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right)\left(\partial^\nu\hat{\phi}(x^\mu)\right) - m_0^2\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\,\hat{\phi}(x^\mu)$$

mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt. Leiten Sie aus $\hat{\mathcal{L}}_{KG}\left[\hat{\phi}(x^\mu), \partial^\mu\hat{\phi}(x^\mu)\right]$ mithilfe der Legendre-Transformation bezüglich $\partial_0\hat{\phi}(x^\mu)$ und $\partial_0\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)$ die Hamilton-Dichte

$$\hat{\mathcal{H}}_{KG}\left[\hat{\phi}(x^\mu), \hat{\pi}(x^\mu)\right] = \hat{\pi}^\dagger(x^\mu)\,\hat{\pi}(x^\mu) + \left(\nabla\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right)\cdot\left(\nabla\hat{\phi}(x^\mu)\right) + m_0^2\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\,\hat{\phi}(x^\mu)$$

her und nutzen Sie sie, um den Hamiltonoperator eines Skalarfeldes genügend der Klein-Gordon-Gleichung anzugeben.

3 (c) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator geschrieben werden kann als

$$\hat{H} = \int d^3p\,\left[\hat{N}^{(a)}_{\mathbf{p}} + \hat{N}^{(b)}_{\mathbf{p}} + 1\right]E_{\mathbf{p}}$$

mit den Besetzungszahloperatoren $\hat{N}^{(a)}_{\mathbf{p}} \equiv \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$ und $\hat{N}^{(b)}_{\mathbf{p}} \equiv \hat{b}^\dagger_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}$.

3 (d) Um zwischen den beiden Teilchenarten unterscheiden zu können, wird der Operator

$$\hat{N} \equiv \imath\int d^3x\,\left[\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\,\partial_0\hat{\phi}(x^\mu) - \hat{\phi}(x^\mu)\,\partial_0\hat{\phi}^\dagger(x^\mu)\right]$$

definiert. Zeigen Sie

$$\hat{N} = \int d^3p\,\left[\hat{N}^{(a)}_{\mathbf{p}} - \hat{N}^{(b)}_{\mathbf{p}}\right] \quad .$$

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de