12. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 12.07.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*11 Punkte*] Fermionen in einem äußeren Feld

$\boxed{2}$ (a) Die Dirac-Gleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld ergibt sich aus der Substitution $\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$ (minimale Ankopplung), also:

$$(\imath\gamma^\mu(\partial_\mu + \imath e A_\mu) - m)\,\psi = 0.$$

Zeigen Sie, dass sich die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ als Summe einer freien Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ und einem Teil $\mathcal{L}_1$ schreiben lässt, welcher die Wechselwirkung mit dem Feld darstellt.

$\boxed{2}$ (b) Geben Sie den zu ψ_a adjungierten Impuls π_a und die Hamiltondichte $\mathcal{H}$ an.

$\boxed{3}$ (c) Geben Sie die Lagrangedichte des wechselwirkenden Dirac- und Strahlungsfeldes an, indem Sie $A_{e\mu}$ durch das quantisierte Strahlungsfeld ersetzen und die Lagrangedichte des freien Strahlungsfeldes addieren.

$\boxed{2}$ (d) Folgern Sie daraus die adjungierten Impulse für das Dirac- und Strahlungsfeld und den Operator der Hamiltondichte.

$\boxed{2}$ (e) Wie lauten die Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren im Heisenbergbild?

2. [*8 Punkte*] Lorentz-Invarianz

$\boxed{3}$ (a) Wir wollen Integrationen im Minkowski-Raum betrachten. Während $\frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2-m^2)\Theta(p^0)$ offensichtlich ein lorentzinvariantes Maß ist, da $p^2 = p^\mu p_\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist, gilt dies für d^3p nicht. Zeigen Sie, dass das Maß $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}$ mit $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ und $p^2 = m^2$ lorentzinvariant ist.
Hinweis: Nutzen Sie dazu $\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\left(\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)\right)$.

$\boxed{2}$ (b) Die Vierer-Impulszustände $\{|p\rangle\}$ bilden eine vollständige Basis. Man kann sie über $|p\rangle = N(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}\rangle$ in Beziehung zu den Dreier-Impulszuständen stellen. Bestimmen Sie $N(\boldsymbol{p})$, wobei die Normierung $\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}'\rangle = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$ gilt.

$\boxed{3}$ (c) Leiten Sie ausgehend von

$$\hat{\alpha}^\dagger(\boldsymbol{p})\,|0\rangle = |\boldsymbol{p}\rangle, \qquad \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{p})\,|0\rangle = |p\rangle$$

eine Beziehung zwischen den Operatoren $\hat{\alpha}(\boldsymbol{p})$ und $\hat{a}(\boldsymbol{p})$ her. Bestimmen Sie die Antikommutatorrelationen der Operatoren $\hat{a}(\boldsymbol{p})$.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de

3. [*13 Punkte*] **Fermionen in 2. Quantisierung**
Der Feldoperator des quantisierten Dirac-Feldes ist gegeben durch

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2p^0} \sum_s \left[\hat{a}_s(\boldsymbol{p}) \tilde{u}_s(\boldsymbol{p}) e^{-\imath p_\mu x^\mu} + \hat{b}_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \tilde{v}_s(\boldsymbol{p}) e^{\imath p_\mu x^\mu} \right].$$

mit den Spinoren

$$\tilde{u}_s(\boldsymbol{p}) = \sqrt{p^0+m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p^0+m}\chi_s \end{pmatrix}, \qquad \tilde{v}_s(\boldsymbol{p}) = -\sqrt{p^0+m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p^0+m}\epsilon\chi_s \\ \epsilon\chi_s \end{pmatrix}.$$

Die Viererimpuls $\hat{P}^\mu$ des Dirac-Feldes und die Gesamtladung $\hat{Q}$ sind definiert als

$$\hat{P}^\mu = i \int d^3x\, \hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t)\, \gamma^0\, \partial^\mu\, \hat{\psi}(\boldsymbol{x},t),$$
$$\hat{Q} = -e \int d^3x\, \hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t)\, \gamma^0\, \hat{\psi}(\boldsymbol{x},t).$$

Integrieren Sie die Ausdrücke explizit aus, um die folgenden Darstellungen in Normalordnung zu erhalten:

$$\hat{H} = \hat{P}^0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2p^0} \sum_s p^0 \left(\hat{a}_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \hat{a}_s(\boldsymbol{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \hat{b}_s(\boldsymbol{p}) \right),$$
$$\hat{\boldsymbol{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2p^0} \sum_s \boldsymbol{p} \left(\hat{a}_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \hat{a}_s(\boldsymbol{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \hat{b}_s(\boldsymbol{p}) \right),$$
$$\hat{Q} = -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2p^0} \sum_s \left(\hat{a}_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \hat{a}_s(\boldsymbol{p}) - \hat{b}_s^\dagger(\boldsymbol{p}) \hat{b}_s(\boldsymbol{p}) \right).$$

4. [*8 Punkte*] **Feldoperatorrelationen des quantisierten Dirac-Feldes**
Für die Feldoperatoren des quantisierten Dirac-Feldes gelten die folgenden Antikommutatorrelationen:

$$\left\{ \hat{\psi}(\boldsymbol{x},t), \hat{\psi}(\boldsymbol{x}',t) \right\} = \left\{ \hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t), \hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x}',t) \right\} = 0,$$
$$\left\{ \hat{\psi}(\boldsymbol{x},t), \hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x}',t) \right\} = \gamma^0 \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

Nutzen Sie diese, um

$$\left[\hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x},t) u_1 \hat{\psi}(\boldsymbol{x},t), \hat{\bar{\psi}}(\boldsymbol{x}',t) u_2 \hat{\psi}(\boldsymbol{x}',t) \right] = 0 \text{ für } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$$

für beliebige 4×4-Matrizen u_1, u_2 zu zeigen.

Hinweis: Zeigen Sie dazu zuerst die folgende Kommutatorrelation

$$\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D} \right] = \hat{A} \left\{ \hat{B}, \hat{C} \right\} \hat{D} - \hat{A}\hat{C} \left\{ \hat{B}, \hat{D} \right\} - \hat{C} \left\{ \hat{A}, \hat{D} \right\} \hat{B} + \left\{ \hat{C}, \hat{A} \right\} \hat{D}\hat{B}.$$

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 anne.hafner@lusi.uni-sb.de