13. Übung

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 19.07.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*10 Punkte*] **Erwartungswerte des EM-Feldes**

Die Komponenten des Viererpotentials A^μ sind in Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ im quellfreien Fall gegeben durch

$$\hat{A}_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{\imath kx} \hat{a}^\dagger_\mu(\boldsymbol{k}) + e^{-\imath kx} \hat{a}_\mu(\boldsymbol{k}) \right\},$$

wobei $k = (\omega, \boldsymbol{k})$, $\omega = |\boldsymbol{k}|$, $kx = k^\mu x_\mu = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ und die Operatoren den in der Vorlesung gezeigten Bose-Vertauschungsrelationen genügen. Im Zuge eines Basiswechsels werden die Operatoren

$$\hat{\alpha}^\dagger_0(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger_0(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{e}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k})), \qquad \hat{\alpha}^\dagger_1(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{e}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}),$$

$$\hat{\alpha}^\dagger_2(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{e}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}), \qquad \hat{\alpha}^\dagger_3(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger_0(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{e}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}))$$

mit $\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger = (\hat{a}^\dagger_1, \hat{a}^\dagger_2, \hat{a}^\dagger_3)$ eingeführt. Dabei bilden die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 := \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ ein orthonormales Dreibein mit $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$. In der Vorlesung wurde im Rahmen des Gupta-Bleuler-Verfahrens gezeigt, dass $\hat{\boldsymbol{a}}^\dagger(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{e}_1 \hat{\alpha}^\dagger_1(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{e}_2 \hat{\alpha}^\dagger_2(\boldsymbol{k})$ gilt. Zeigen Sie, dass für die Erwartungswerte von Energie p^0 und Impuls $\boldsymbol{p}$ in einem beliebigen physikalischen Zustand gilt:

$$\langle p^0 \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \omega \left\langle \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{\alpha}^\dagger_i(\boldsymbol{k}) \hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k}) + \hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k}) \hat{\alpha}^\dagger_i(\boldsymbol{k}) \right) \right\rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\, \boldsymbol{k} \left\langle \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{\alpha}^\dagger_i(\boldsymbol{k}) \hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k}) + \hat{\alpha}_i(\boldsymbol{k}) \hat{\alpha}^\dagger_i(\boldsymbol{k}) \right) \right\rangle.$$

Hinweis: Verwenden Sie dazu $p^0 = \int d^3x\, \frac{1}{2}[\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x})]$ und $\boldsymbol{p} = \int d^3x\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$.

2. [*10 Punkte*] **Feynman-Propagator**

5 (a) Zeigen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung, dass für den Photon-Propagator gilt:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = \imath g_{\mu\nu} D_F(x-y) = \lim_{\epsilon \to +0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-\imath k(x-y)} \frac{-\imath g_{\mu\nu}}{k^2 + \imath\epsilon}$$

mit

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-\imath k(x-y)}.$$

5 (b) Das zeitgeordnete Produkt zweier Dirac-Spinorkomponenten ist definiert über

$$T(\psi_\mu(x) \bar{\psi}_\nu(y)) = \theta(x^0 - y^0) \psi_\mu(x) \bar{\psi}_\nu(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\nu(y) \psi_\mu(x).$$

Zeigen Sie, dass für den Propagator des freien Elektrons gilt:

$$\langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle = -\imath S_F(x-y) = \lim_{\epsilon \to +0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-\imath p(x-y)} \frac{\imath(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + \imath\epsilon}.$$

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27
bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23
anne.hafner@lusi.uni-sb.de

3. [*10 Punkte*] **Streuamplitude**

Für die Streuamplitude gilt in n-ter Ordnung

$$\langle f|S^{(n)}|i\rangle = \frac{(-\imath e)^n}{n!} \int d^4x_1...d^4x_n \langle f|T(:\bar{\psi}(x_1)\not{A}(x_1)\psi(x_1): \; ... \; :\bar{\psi}(x_n)\not{A}(x_n)\psi(x_n):)|i\rangle.$$

Betrachten Sie Compton-Streuung aus einem Anfangszustand $|i\rangle = b^\dagger_{\boldsymbol{p}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}}|0\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle = b^\dagger_{\boldsymbol{p}'} a^\dagger_{\boldsymbol{k}'}|0\rangle$.

5 (a) Drücken Sie die Streuamplitude in zweiter Ordnung in e als Integral über ein Produkt von Propagatoren aus. Werten Sie dazu das Matrixelement mittels Vertauschungsrelationen aus.

5 (b) Verwenden Sie das Wick'sche Theorem um die Streuamplitude in vierter Ordnung in e als Integral über ein Produkt von Propagatoren zu schreiben.

4. [*10 Punkte*] **Feynmann-Diagramme**

5 (a) Zeichnen Sie alle Feynman-Diagramme vierter Ordnung in e für Elektron-Elektron-Streuung.

5 (b) Übersetzen Sie die Diagramme in analytische Ausdrücke.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de