1. Übung

Theoretische Physik (NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 26.04.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*12 Punkte*] **Isingkette**

Wir betrachten eine homogene Isingkette der Länge N mit periodischen Randbedingungen in einem externen transversalen Feld h. Die Kopplung zwischen den Spins betrage J. Das System kann durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben werden:

$$\hat{H} = -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_i^x\hat{\sigma}_{i+1}^x - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_i^z \quad .$$

$\hat{\sigma}_i^x$, $\hat{\sigma}_i^y$ und $\hat{\sigma}_i^z$ sind die Pauli-Spinoperatoren in x-, y- bzw. z-Richtung an der Position i.

3 (a) Wie beim harmonischen Oszillator können auch für dieses System Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eingeführt werden gemäß:

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_i^x + \imath\hat{\sigma}_i^y\right) \quad , \quad \hat{a}_i = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_i^x - \imath\hat{\sigma}_i^y\right) \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ für gleiche Indices Antikommutator- und für verschiedene Indices Kommutatorrelationen erfüllen:

$$\left\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i\right\} = 1 \quad , \quad \left(\hat{a}_i^\dagger\right)^2 = \left(\hat{a}_i\right)^2 = 0 \quad ,$$

$$\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j\right] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = \left[\hat{a}_i, \hat{a}_j\right] = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad .$$

Aufgrund dieser gemischten Kommutatorrelationen spricht man hier von hard-core Bosonen.

6 (b) Durch die Jordan-Wigner Transformation können die Operatoren $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ in reine Fermioperatoren $\hat{c}_i^\dagger$ und $\hat{c}_i$ überführt werden:

$$\hat{c}_i^\dagger = \hat{a}_i^\dagger \exp\left[-\imath\pi\sum_{j=1}^{i-1}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\right] \quad , \quad \hat{c}_i = \exp\left[\imath\pi\sum_{j=1}^{i-1}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\right]\hat{a}_i \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\hat{c}_i^\dagger$ und $\hat{c}_i$ in der Tat Fermioperatoren darstellen, d. h. zeigen Sie, dass sie den Antikommutatorrelationen genügen:

$$\left\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j\right\} = \delta_{i,j} \quad , \quad \left\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\right\} = \left\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\right\} = 0 \quad .$$

3 (c) Wir führen nun den Teilchenzahloperator $\hat{n}_i^{hcb} = \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ für die hard-core Bosonen bzw. $\hat{n}_i^f = \hat{c}_i^\dagger\hat{c}_i$ für die Fermionen ein. Zeigen Sie in beiden Fällen, dass der Teilchenzahloperator für eine bestimmte Position nur die Eigenwerte 0 und 1 hat.

2. [*16 Punkte*] **Ortsdarstellung der Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators**

Wir möchten den quantenmechanischen harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung behandeln. Hierzu führen wir die ortsabhängige Wellenfunktion $\varphi_n(q) = \langle q|n\rangle$ ein bzw. in dimensionslosen Koordinaten $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$.

3 (a) Leiten Sie ausgehend von der Grundzustandswellenfunktion $\varphi_0(x)$ die Differentialgleichung

$$\left(x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0(x) = 0$$

her und bestimmen Sie ihre normierte Lösung.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de

3 (b) Leiten Sie aus der Lösung die höheren Eigenfunktionen her und drücken Sie diese über die Hermite-Polynome $H_n(x)$ aus:

$$H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad .$$

2 (c) Zeigen Sie, dass die Hermite-Polynome in der Form

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

geschrieben werden können.

2 (d) Untersuchen Sie den Symmetriecharakter der Hermite-Polynome. Was ergibt sich hieraus für die Symmetrie der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators bzw. für die Parität seines Hamiltonoperators?

2 (e) Berechnen Sie in der Ortsdarstellung explizit die Wirkung des Erzeugungs- und des Vernichtungsoperators auf $\varphi_n(x)$.

2 (f) Zeigen Sie folgende Rekursionseigenschaft der Hermite-Polynome:

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) \quad .$$

2 (g) Skizzieren Sie die Eigenfunktionen und Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des harmonischen Oszillators als Funktion des Ortes x für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. [*12 Punkte*] Der verschobene quantenmechanische harmonische Oszillator

Wir betrachten nun einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator, der einer zusätzlichen zeitlich konstanten Kraft $\sqrt{2}\gamma\hbar\omega$ ausgesetzt ist.

2 (a) Bestimmen Sie das zu der konstanten Kraft gehörige Potential in Ortsdarstellung in Abhängigkeit von x und geben Sie die Schrödingergleichung in Ortsdarstellung an. Führen Sie hierbei die dimensionslose Energie $\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ ein.

2 (b) Drücken Sie (ausgehend von der Definition von $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ in Aufgabe 1 (c) auf Blatt 0) x und $\frac{d}{dx}$ über die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus und bringen Sie damit die Schrödingergleichung in die Form

$$\left\{\hat{n} - \gamma\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right)\right\}|\psi\rangle = \varepsilon'|\psi\rangle$$

mit $\varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{2}$.

1 (c) Wir führen die transformierten Operatoren $\hat{\tilde{b}}^\dagger = \hat{b}^\dagger - \gamma$ und $\hat{\tilde{b}} = \hat{b} - \gamma$, die Wellenfunktion $|\tilde{\psi}\rangle$ sowie die Energie $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + \gamma^2$ ein. Nutzen Sie dies, um die Schrödingergleichung umzuschreiben.

2 (d) Welchen Vertauschungsrelationen genügen $\hat{\tilde{b}}^\dagger$ und $\hat{\tilde{b}}$? Nutzen Sie dies, um aus der transformierten Schrödingergleichung unmittelbar Eigenfunktionen und Eigenwerte zu konstruieren. Geben Sie E_n für den verschobenen quantenmechanischen harmonischen Oszillator konkret an.

2 (e) Aus den bisherigen Überlegungen ist der Zustand $|\tilde{0}\rangle$ bekannt mit $\hat{\tilde{b}}|\tilde{0}\rangle = 0$. Wir sind nun daran interessiert, $|0\rangle$ mit $\hat{b}|0\rangle = 0$ zu bestimmen. Zeigen Sie dazu zunächst, dass für eine analytische Funktion f gilt:

$$\left[\hat{b}, f\left(\hat{b}^\dagger\right)\right] = \frac{\partial f\left(\hat{b}^\dagger\right)}{\partial \hat{b}^\dagger} \quad , \quad \left[\hat{b}^\dagger, f\left(\hat{b}\right)\right] = -\frac{\partial f\left(\hat{b}\right)}{\partial \hat{b}} \quad .$$

3 (f) Erläutern Sie, weshalb $|\tilde{0}\rangle = f\left(\hat{b}^\dagger\right)|0\rangle$ gilt, und nutzen Sie diese Relation, um ausgehend von $\hat{\tilde{b}}|\tilde{0}\rangle = 0$ den Zustand $|0\rangle$ zu bestimmen. Die Normierungskonstante von $f\left(\hat{b}^\dagger\right)$ müssen Sie hierbei nicht explizit angeben.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de