

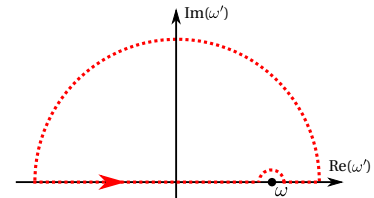
Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 24.05.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [9 Punkte] Kramers-Kronig-Relationen

- 6 (a) Die Kausalität bedingt, dass die Suszeptibilität $\chi_{AB}(\omega)$ in der oberen Halbebene analytisch ist. Betrachten Sie das Integral

$$\int_C d\omega' \frac{\chi_{AB}(\omega')}{\omega' - \omega},$$

über die in der Abbildung dargestellte, geschlossene Kurve C .



Leiten Sie somit die aus der Vorlesung bekannten Kramers-Kronig-Relationen her:

$$\begin{aligned} \text{Re } \chi_{AB}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } \chi_{AB}(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \text{Im } \chi_{AB}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re } \chi_{AB}(\omega')}{\omega' - \omega} \end{aligned}$$

Nehmen Sie dazu an, dass $\chi_{AB}(\omega)$ im Unendlichen hinreichend stark abfällt.

- 3 (b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \text{Re } \chi_{AB}(\omega) &= \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im } \chi_{AB}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \\ \text{Im } \chi_{AB}(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega \text{Re } \chi_{AB}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

gilt, falls $\text{Re } \chi_{AB}(\omega)$ eine gerade und $\text{Im } \chi_{AB}(\omega)$ eine ungerade Funktion ist für reelle ω .

2. [11 Punkte] Dynamische Spin-Suszeptibilität

Wir betrachten einen quantenmechanischen Spin in einem statischen Magnetfeld $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Das magnetische Moment $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma \hat{\mathbf{S}}$ ist über den dreidimensionalen Spinoperator $\hat{\mathbf{S}}$ bestimmt. Im Folgenden untersuchen wir die Antwort der Spin-Polarisation $\langle \hat{S}_x(t) \rangle$, $\langle \hat{S}_y(t) \rangle$ auf ein zur Zeit $t' = 0$ adiabatisch eingeschaltetes, oszillierendes Feld

$$\mathbf{B}_s(t) = B_s \cos(\omega t) \mathbf{e}_x.$$

- 1 (a) Bestimmen Sie den Hamiltonian des Systems

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}(t)$$

und identifizieren Sie den Störterm \hat{H}_s .

- 4 (b) Berechnen Sie die transversale Suszeptibilität

$$\chi_{\hat{S}_x \hat{S}_x}(t) = \frac{i}{\hbar} \Theta(t) \langle [\hat{S}_x(t), \hat{S}_x(0)] \rangle, \quad \chi_{\hat{S}_x \hat{S}_x}(z) = \int_0^{\infty} dt \chi_{\hat{S}_x \hat{S}_x}(t) e^{izt}$$

und die Antwort der Spinpolarisation $\langle \hat{S}_x(t) \rangle$.

- 4 (c) Bestimmen Sie analog $\chi_{\hat{S}_y \hat{S}_x}(t)$ und $\langle \hat{S}_y(t) \rangle$.

- 2 (d) Interpretieren Sie das Ergebnis und führen Sie für $\langle \hat{S}_x(t) \rangle$ und $\langle \hat{S}_y(t) \rangle$ den statischen Limes $\omega \rightarrow 0$ aus.

3. [8 Punkte] Lineare Atomkette

Wir betrachten eine lineare Atomkette der Länge N mit periodischen Randbedingungen, deren Atome alle die gleiche Masse M haben und deren Ruhelagen sich im Abstand a voneinander befinden. q_l sei die Abweichung des l -ten Atoms aus der Ruhelage. Es werden nur longitudinale Auslenkungen betrachtet. Die Kopplung zwischen den Atomen werde durch harmonische Kräfte mit der Federkonstante K beschrieben. Die (klassische) Hamiltonfunktion der linearen Kette mit $q_{N+1} = q_1$ lautet also:

$$H = \sum_l \frac{p_l^2}{2M} + \frac{K}{2} \sum_l (q_l - q_{l+1})^2 \quad .$$

- 4 (a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$M\ddot{q}_l(t) = K(q_{l+1}(t) + q_{l-1}(t) - 2q_l(t))$$

lautet

$$q_l(t) = \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikla} e^{-i\omega_k t} A_k + \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-ikla} e^{i\omega_k t} A_k^* \right) \quad (1)$$

mit $\omega_k = 2\sqrt{K/M} |\sin(\frac{ka}{2})|$ und $k = 2\pi \frac{n}{Na}$ mit $-\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2}$.

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $q_l(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikla} B_k(t)$ mit $B_k(t) = e^{-i\omega_k t} A_k$. Hieraus ergibt sich die Dispersionsrelation für ω_k . Die Diskretisierung der k -Werte folgt aus den periodischen Randbedingungen.

- 4 (b) Der Impuls ist gegeben durch

$$p_l(t) = \dot{q}_l(t) \cdot M = \sum_k \left(-i\omega_k M \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikla} e^{-i\omega_k t} A_k + i\omega_k M \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-ikla} e^{i\omega_k t} A_k^* \right) \quad . \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass durch Einsetzen von $q_l(t)$ und $p_l(t)$ die Hamiltonfunktion wie folgt geschrieben werden kann:

$$H = \sum_k M\omega_k^2 (B_k^*(t)B_k(t) + B_k(t)B_k^*(t)) \quad (3)$$

Hinweis: Es gilt $\sum_l e^{ikla} e^{ik'la} = N\delta_{k,-k'}$ und $\omega_k = \omega_{-k}$.

4. [12 Punkte] Quantentheoretische Behandlung der linearen Atomkette

- 4 (a) Wir definieren $B_k = \sqrt{\hbar/(2M\omega_k)} b_k$. Damit ist $q_l = \sum_k \sqrt{\hbar/(2MN\omega_k)} (b_k + b_{-k}^+) e^{ikla}$ und $p_l = -i \sum_k \sqrt{(\hbar M\omega_k)/(2N)} (b_k - b_{-k}^+) e^{ikla}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$b_k = \sum_l \left(\sqrt{\frac{M\omega_k}{2\hbar N}} q_l + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar M\omega_k N}} p_l \right) e^{-ikla} \quad (4)$$

$$b_k^+ = \sum_l \left(\sqrt{\frac{M\omega_k}{2\hbar N}} q_l - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar M\omega_k N}} p_l \right) e^{ikla} \quad (5)$$

- 4 (b) Nun gehen wir über zur quantenmechanischen Beschreibung der linearen Kette. Die Koordinaten q_l und Impulse p_l sind in der klassischen Mechanik kanonisch konjugierte Variablen, also werden sie in der Quantenmechanik durch kanonisch konjugierte Operatoren ersetzt, für die dann $[p_l, q_l] = \frac{\hbar}{i}$ gilt. Alle anderen Kommutatoren verschwinden: $[p_l, q_{l'}] = 0$ für $l \neq l'$, $[q_l, q_{l'}] = [p_l, p_{l'}] = 0$ für alle l, l' . Entsprechend werden die Amplituden b_k und b_k^+ durch Operatoren ersetzt.

Zeigen Sie, dass dann aus (4) und (5) folgt: $[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+] = \delta_{k,k'}$, $[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = [\hat{b}_k^+, \hat{b}_{k'}^+] = 0$.

Die Operatoren \hat{b}_k^+ und \hat{b}_k sind also bosonische Erzeuger und Vernichter (bzw. Auf- und Absteigeoperatoren von harmonischen Oszillatoren).

- 4 (c) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator der linearen Kette $\hat{H} = \sum_l \frac{\hat{p}_l^2}{2M} + \frac{K}{2} \sum_l (\hat{q}_l - \hat{q}_{l+1})^2$ mit den Operatoren \hat{b}_k und \hat{b}_k^+ geschrieben werden kann als

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{b}_k^+ \hat{b}_k + \frac{1}{2} \right) \quad .$$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat (3) aus Aufgabe 3.