Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 31.05.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*14 Punkte*] **Hamiltonfunktion des Strahlungsfeldes**

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes kann durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} A_\mu j_\mu$$

beschrieben werden. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist dabei durch

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\imath E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\imath E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\imath E_3 \\ \imath E_1 & \imath E_2 & \imath E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und die Vierervektoren x_μ, A_μ und j_μ durch

$$(x_\mu) = (\boldsymbol{x}, \imath ct), \qquad (A_\mu) = (\boldsymbol{A}, \imath\phi), \qquad (j_\mu) = (\boldsymbol{j}, \imath c\rho).$$

$\boxed{6}$ (a) Leiten Sie die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j_\nu$$

mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen her.

$\boxed{8}$ (b) Bestimmen Sie den kanonisch konjugierten Impuls Π_μ und die Hamiltondichte $\mathcal{H}$

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}, \qquad \mathcal{H} = \Pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L},$$

um zu zeigen, dass für die Hamiltonfunktion H des freien Strahlungsfeldes gilt:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) d\boldsymbol{r}.$$

2. [*12 Punkte*] **Hamiltonfunktion des Strahlungsfeldes- Teil 2**

Zeigen Sie unter Verwendung der in der Vorlesung gezeigten Darstellung des Vektorpotentials

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left(A_\lambda(\boldsymbol{k}) \frac{e^{\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)}}{\sqrt{V}} + A_\lambda^\star(\boldsymbol{k}) \frac{e^{-\imath(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)}}{\sqrt{V}} \right) \boldsymbol{u}_\lambda(\boldsymbol{k}),$$

dass für die Hamiltonfunktion des Strahlungsfeldes gilt:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8\pi} \int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) d\boldsymbol{r} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_\lambda \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \left(A_\lambda(\boldsymbol{k}, t) A_\lambda^\star(\boldsymbol{k}, t) + A_\lambda^\star(\boldsymbol{k}, t) A_\lambda(\boldsymbol{k}, t) \right). \end{aligned}$$

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de

3. [*14 Punkte*] **BCS-Theorie der Supraleitung**

Betrachten Sie ein System, dessen Elektronen nur über ein spinunabhängiges Potential miteinander wechselwirken. Die BCS-Theorie zur Beschreibung der Supraleitung in dem betrachteten System beschränkt sich auf die Wechselwirkung zwischen Elektronenpaaren mit verschwindendem Gesamtimpuls und entgegengesetzten Spins, sodass sich der Hamiltonoperator vereinfacht zu

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \overline{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}',\uparrow} \quad .$$

Der BCS-Hamiltonoperator werde im Folgenden in Mean-Field Näherung untersucht. Unter Vernachlässigung konstanter Terme ergibt sich

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} \left(\Delta^*_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} + \Delta_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow} \right) \quad \text{mit} \quad \Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} \overline{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \langle \hat{a}_{-\mathbf{k}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}',\uparrow} \rangle \quad .$$

Der Erwartungswert $\langle \hat{a}_{-\mathbf{k}',\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}',\uparrow} \rangle$ ist dabei im Grundzustand des Systems zu bilden.

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass mithilfe des Nambu-Spinors

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \\ \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix}$$

der BCS-Hamiltonoperator unter Vernachlässigung einer Konstante auf die Gestalt

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\Psi}^\dagger_{\mathbf{k}} \mathcal{H} \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}$$

gebracht werden kann und geben Sie die (2×2)-Matrix $\mathcal{H}$ explizit an.

$\boxed{4}$ (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_{\mathbf{k}}$ von $\mathcal{H}$ sowie die unitäre Transformation

$$U = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & -v_{\mathbf{k}} \\ v^*_{\mathbf{k}} & u^*_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad ,$$

sodass $U^H \mathcal{H} U$ diagonal ist. Beachten Sie dabei eine mögliche Phase in $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$.

$\boxed{3}$ (c) Zeigen Sie, dass der BCS-Hamiltonoperator ausgedrückt über die transformierten Operatoren

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\uparrow} \\ \hat{\alpha}^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix} = U^H \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \\ \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow} \end{pmatrix}$$

diagonal ist. Welcher Bedingung müssen die Phasenfunktionen in den Phasenfaktoren von $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ genügen, damit die Transformation kanonisch ist, d. h. die transformierten Operatoren wiederum Fermioperatoren darstellen?

$\boxed{3}$ (d) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|BCS\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(1 + \frac{v_{\mathbf{k}}}{u^*_{\mathbf{k}}} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k},\downarrow} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} \right) |0\rangle$$

Grundzustand des BCS-Hamiltonoperators ist.

$\boxed{2}$ (e) Nutzen Sie $\langle \hat{\alpha}^\dagger_{\mathbf{k},\uparrow} \hat{\alpha}_{\mathbf{k},\uparrow} \rangle = n(E_{\mathbf{k}})$, um eine Selbstkonsistenzgleichung für die Energielücke $\Delta_{\mathbf{k}}$ herzuleiten. Diese Gleichung wird auch als BCS-Gleichung bezeichnet.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de