

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 07.06.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

**1. [14 Punkte] Feldoperatoren und Impuls des Strahlungsfeldes**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Operator des Vektorpotentials gegeben ist durch

$$\hat{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{k}}}} \left( \hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} + \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right) \mathbf{u}_{\lambda}(\mathbf{k}).$$

- 4 (a) Berechnen Sie die Feldoperatoren  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  und  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$  des elektrischen bzw. magnetischen Feldes in Coulomb-Eichung.
- 10 (b) Der Operator für den Impuls des elektromagnetischen Feldes ist

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{4\pi c} \int (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}}) d\mathbf{r}$$

und der für den Spin-Anteil des Drehimpulses lautet

$$\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{4\pi c} \int (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{A}}) d\mathbf{r}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar \mathbf{k} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{L}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \frac{\mathbf{k}}{k} \left( \hat{a}_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{+}(\mathbf{k}) - \hat{a}_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{-}(\mathbf{k}) \right)$$

mit  $\hat{a}_{\pm}(\mathbf{k}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1(\mathbf{k}) \pm i \hat{a}_2(\mathbf{k}))$ .

**2. [14 Punkte] Kommutatorrelationen des elektromagnetischen Feldes**

Da die Leiteroperatoren nicht kommutieren, werden die Feldoperatoren  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  und  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$  im Allgemeinen auch nicht kommutieren.

- 6 (a) Zeigen Sie zunächst die folgenden Relationen zwischen dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und den zugehörigen Polarisationsvektoren  $\mathbf{u}_{\lambda}(\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} u_{\lambda,l} u_{\lambda,m} &= \delta_{l,m} - \frac{k_l k_m}{|\mathbf{k}|^2}, \\ \sum_{\lambda} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\lambda})_l (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\lambda})_m}{|\mathbf{k}|} &= \delta_{l,m} - \frac{k_l k_m}{|\mathbf{k}|^2}, \\ \sum_{\lambda} u_{\lambda,l} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{\lambda})_m}{|\mathbf{k}|} &= \sum_n \epsilon_{lmn} \frac{k_n}{|\mathbf{k}|}. \end{aligned}$$

für  $l, m, n \in \{x, y, z\}$ , wobei  $\epsilon_{lmn}$  der Levi-Civita-Tensor ist.

- 8 (b) Zeigen Sie damit die folgenden Kommutatorbeziehungen der kartesischen Feldkomponenten  $\hat{E}_l(\mathbf{r}, t)$ ,  $\hat{B}_l(\mathbf{r}, t)$  in Coulomb-Eichung:

$$\begin{aligned} [\hat{E}_l(\mathbf{r}, t), \hat{E}_m(\mathbf{r}', t)] &= [\hat{B}_l(\mathbf{r}, t), \hat{B}_m(\mathbf{r}', t)] = 0 \\ [\hat{E}_l(\mathbf{r}, t), \hat{B}_m(\mathbf{r}', t)] &= -4\pi i c \hbar \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial x_n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

### 3. [12 Punkte] Emission und Absorption von Photonen

Zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld und Materie betrachten wir den Hamiltonian des Gesamtsystems

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{em}} + \hat{H}_{\text{mat}} + \hat{H}_I,$$

wobei

$$\hat{H}_{\text{em}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{N}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad \hat{H}_{\text{mat}} = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m_j} + V(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \dots).$$

Im Folgenden soll das Wasserstoffatom betrachtet werden, sodass die Summation im Materiehamiltonian über das Proton und das Elektron erfolgt:

$$\hat{H}_{\text{mat}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_p^2}{2m_p} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_e^2}{2m_e} - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e|}.$$

- 4 (a) Zeigen Sie, dass in Dipolnäherung die Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld und Wasserstoffatom mit Minimalsubstitution in Coulomb-Eichung gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \hat{H}_I^{(1)} + \hat{H}_I^{(2)} = - \sum_j \frac{e_j}{m_j c} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_j, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_j + \sum_j \frac{e_j^2}{2m_j c^2} (\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_j, t))^2 \\ &= - \frac{e}{\mu c} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, t) \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{2\mu c^2} (\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, t))^2. \end{aligned}$$

Führen Sie dazu Schwerpunkts- und Relativkoordinaten wie folgt ein:

$$\begin{aligned} M &= m_p + m_e, & \mu &= \frac{m_p m_e}{M}, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_p}{M} \mathbf{r}_p + \frac{m_e}{M} \mathbf{r}_e, & \mathbf{r} &= \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e, \\ \mathbf{P} &= M \dot{\mathbf{R}}, & \mathbf{p} &= \mu \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

- 4 (b) Nun soll die Wirkung von  $\hat{H}_I^{(1)}$  auf einen Anfangszustand  $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle$  mit

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{mat}} |\epsilon_i\rangle &= \epsilon_i |\epsilon_i\rangle, \\ \hat{H}_{\text{em}} |\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) |\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle. \end{aligned}$$

bestimmt werden. Betrachten Sie die folgenden Zustände:

- i.  $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |0\rangle$ ,
- ii.  $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |1_{\mathbf{k}}\rangle$ ,
- iii.  $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}}\rangle$ .

Welche photonischen Prozesse können folglich ablaufen?

Welche photonischen Prozesse werden allgemein durch  $\hat{H}_I^{(2)}$  induziert?

- 4 (c) Setzen Sie im Folgenden  $\mathbf{R} = 0$  und vernachlässigen Sie  $\hat{H}_I^{(2)}$ .
- i. Bestimmen Sie die Übergangsrates von einem Anfangszustand  $|i\rangle = |\epsilon_i\rangle \otimes |0\rangle$  in einen Endzustand  $|f\rangle = |\epsilon_f\rangle \otimes |1_{\mathbf{k}}\rangle$ .
  - ii. Führen Sie den thermodynamischen Limes aus um die mittlere Lebensdauer des Anfangszustandes zu bestimmen.