8. Übung

Ihre Lösung ist in Form einer **Einzelabgabe** bis zum 14.06.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*8 Punkte*] **Kanonische Quantisierung des Strahlungsfeldes**

Die Lagrangefunktion eines elektromagnetischen Feldes, in dem keine Ladungen und Ströme wirken, kann in Coulombeichung dargestellt werden als

$$L = \frac{1}{8\pi} \int d^3k \, \left(\dot{\mathcal{A}}^*(\mathbf{k}) \dot{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) - c^2 k^2 \mathcal{A}^*(\mathbf{k}) \mathcal{A}(\mathbf{k}) \right)$$

Hierbei sind $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ und $\mathcal{A}^*(\mathbf{k})$ die Fourier-Transformierten von $A(\mathbf{r})$ bzw. $A^*(\mathbf{r})$.

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie, dass die Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{A}}} \right)^* - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}} \right)^* = 0$$

der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ auf eine Wellengleichung für $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ führt. Verifizieren Sie, dass der Ansatz

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-\imath \omega_k t} + a^*_{\mathbf{k}} e^{\imath \omega_k t} \right) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}$$

diese Gleichung löst.

$\boxed{2}$ (b) Wir führen nun den kanonisch konjugierten Impuls ein:

$$\Pi(\mathbf{k}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{A}}} \right)^* \quad .$$

Berechnen Sie diesen und drücken Sie ihn durch die Entwicklungskoeffizienten $a_{\mathbf{k}}$ und $a^*_{\mathbf{k}}$ aus.

$\boxed{3}$ (c) Im Zuge der Quantisierung werden $\mathcal{A}$ und Π zu Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{\Pi}$, für deren Komponenten die folgenden kanonischen Kommutatorrelationen gelten:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_n(\mathbf{k}), \mathcal{A}_m(\mathbf{k'})] &= 0 \\ [\Pi_n(\mathbf{k}), \Pi_m(\mathbf{k'})] &= 0 \\ [\mathcal{A}_n(\mathbf{k}), \Pi_m(\mathbf{k'})] &= \imath \hbar \delta_{nm} \delta_{kk'} \end{aligned}$$

Nun seien die Entwicklungskoeffizienten $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ und $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ ebenfalls Operatoren. Zeigen Sie, dass sich diese komponentenweise in der Form

$$\hat{a}_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{A}}_n(\mathbf{k}) + \imath \hat{\Pi}_n(\mathbf{k}) \right) \quad , \quad \hat{a}^\dagger_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{A}}_n(\mathbf{k}) - \imath \hat{\Pi}_n(\mathbf{k}) \right)$$

darstellen lassen und beweisen Sie durch überprüfen der Kommutatorrelationen, dass es sich um bosonische Auf- und Absteigeroperatoren handelt.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de

2. [*10 Punkte*] **Greensche Funktionen**

Wir betrachten nun zeitabhängige Teilchenzustände in der Feldoperatordarstellung. Dazu transformiert man den anfänglichen Feldoperator mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}, t) = e^{\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t} \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r})\, e^{-\frac{\imath}{\hbar}\hat{H}_0 t} \quad .$$

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie durch Entwicklung von $\hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r})$, dass die Feldoperatoren wie folgt dargestellt werden können:

$$\hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-\imath\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{\imath\varepsilon_{\mathbf{k}} t} \quad ; \quad \hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{\imath\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-\imath\varepsilon_{\mathbf{k}} t} \quad .$$

$\boxed{3}$ (b) Die Anfangskoordinaten bzw. -zeit seien $\mathbf{r}_a$ und t_a. Man definiert:

$$\left(\hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}_a, t_a) + \hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}_a, t_a)\, \hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t)\right) |\Phi (0)\rangle = \imath G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a)\, |\Phi (0)\rangle \quad ,$$

Leiten Sie die folgende Darstellung des sogenannten Propagators für $t \geq t_a$ her:

$$G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a) = -\frac{\imath}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{\imath\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) - \imath\varepsilon_{\mathbf{k}}(t-t_a)} \quad .$$

$\boxed{4}$ (c) $G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a)$ beschreibt die Ausbreitung eines freien Teilchens von $\mathbf{r}_a, t_a$ nach $\mathbf{r}, t$ und ist 0 für $t < t_a$. Zeigen Sie, dass der Propagator mithilfe des Zeitordnungsoperators als

$$G_0 (\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_a, t_a) = -\imath \langle 0|\, \hat{T} \hat{\psi}_0 (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger_0 (\mathbf{r}_a, t_a)\, |0\rangle$$

geschrieben werden kann, wobei für den Zeitordnungsoperator $\hat{T}$ gilt:

$$\hat{T}\hat{\psi} (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r}', t') = \hat{\psi} (\mathbf{r}, t)\, \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r}', t')\, \Theta (t - t') - \hat{\psi}^\dagger (\mathbf{r}', t')\, \hat{\psi} (\mathbf{r}, t)\, \Theta (t' - t) \quad .$$

3. [*13 Punkte*] **Lorentz-Transformationen**

$\boxed{2}$ (a) Verifizieren Sie explizit die Invarianz von $s^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}^2$ unter der in der Vorlesung angegebenen Standard-Lorentz-Transformation.

$\boxed{2}$ (b) Sind normale Drehungen (im 3-dim. Raum) Lorentz-Transformationen? Wie steht es mit Zeit- und Raumspiegelungen?

$\boxed{2}$ (c) Kommutieren zwei hintereinander ausgeführte Lorentz-Transformationen?

$\boxed{1}$ (d) Wieviele Parameter hat eine Lorentz-Transformation?

$\boxed{2}$ (e) Welche Werte kann die Determinante $\det \Lambda$ einer Lorentz-Transformation $\Lambda = \left(\Lambda^\mu_{\ \nu}\right)_{\mu\nu}$ annehmen?

$\boxed{2}$ (f) Zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformationen bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

$\boxed{2}$ (g) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $a_\mu b^\mu$ zweier Vierervektoren a_μ, b^μ invariant unter Lorentz-Transformation ist.

4. [*9 Punkte*] **Vierervektoren**

$\boxed{2}$ (a) Wir definieren den Energie-Impuls-Vierervektor $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)^T$. Nutzen Sie die Lorentz-Transformation, um das Transformationsverhalten von E sowie der Komponenten des Impulses zu bestimmen. Gehen Sie dabei von den bekannten Werten für einen ruhenden Körper aus. Bestimmen Sie anschließend die Invariante des Energie-Impuls-Vierervektors.

$\boxed{3}$ (b) In Analogie zum klassischen Fall definieren wir den Vierervektor der Geschwindigkeit gemäß $p^\mu = m_0 v^\mu$. Bestimmen Sie die Invariante des Geschwindigkeitsvierervektors. Nutzen Sie anschließend die Definition der Eigenzeit τ über $s^2 = x_\mu x^\mu \equiv c^2\tau^2$, um zu zeigen, dass $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ gilt.

$\boxed{4}$ (c) Zeigen Sie ausgehend von dem bekannten Ausdruck für die Lorentzkraft $\mathbf{F}_L = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$, dass der Vierervektor der Lorentzkraft die Gestalt $F^\mu_L = \frac{q}{c}\left[v_\nu \left(\partial^\mu A^\nu\right) - \frac{dA^\mu}{d\tau}\right]$ hat. Multiplizieren Sie dazu $\mathbf{F}_L$ mit dem Lorentzfaktor γ und nutzen Sie den Vierergradienten $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)^T$ sowie das Viererpotential $A^\mu = \left(\phi, \mathbf{A}\right)^T$ mit dem skalaren Potential ϕ und dem Vektorpotential $\mathbf{A}$. Vereinfachen Sie den Ausdruck für F^0_L.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23
bbogner@lusi.uni-sb.de anne.hafner@lusi.uni-sb.de