9. Übung

Bitte werfen Sie Ihre Lösung bis zum 21.06.2017 um 12 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 ein. Die Abgabe sollte in Zweiergruppen erfolgen.

1. [*6 Punkte*] **Relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld**

Die kovariante Lagrangefunktion für ein relativistisches Teilchen mit Masse m und Ladung q im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$L(x^\mu, v^\mu, \tau) = -m\, v^\mu v_\mu - \frac{q}{c}\, v^\mu A_\mu.$$

Dabei ist $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ der Vierer-Ort, $v^\mu = \gamma(c, \boldsymbol{v})$ die Vierer-Geschwindigkeit, $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ das Vierer-Potential und τ die Eigenzeit. Leiten Sie mit Hilfe der kovarianten Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial v^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

die kovariante Kraftgleichung her:

$$K_\mu = m\frac{d}{d\tau} v_\mu = \frac{q}{c}\left[\partial_\mu (v^\mu A_\mu) - \frac{d}{d\tau} A_\mu\right].$$

Anmerkung: Wie in Aufgabe 4 von Blatt 8 gezeigt wurde, beschreiben die Raumkomponenten der Vierer-Kraft $K^\mu = \gamma\,(\, \boldsymbol{F}_\mathrm{L} \cdot \boldsymbol{v}/c,\, \boldsymbol{F}_\mathrm{L}\,)$ somit die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = q(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B})$.

2. [*7 Punkte*] **Nichtrelativistischer Grenzfall der Klein-Gordon-Gleichung**

Leiten Sie den nichtrelativistischen Grenzfall der freien Klein-Gordon-Gleichung her. Nehmen Sie dabei an, dass die Energie $E' = E - m_0c^2$ nichtrelativistisch ist, das heißt $E' \ll m_0c^2$. Verwenden Sie den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\imath \frac{m_0 c^2}{\hbar} t}\phi(\mathbf{r}, t),$$

um zu zeigen, dass sich im nichtrelativistischen Fall die Schrödingergleichung ergibt. Diskutieren Sie auch das Verhalten der „Wahrscheinlichkeitsdichte" ρ

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^\star \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^\star}{\partial t}\right)$$

der Klein-Gordon-Gleichung in diesem Fall. Hinweis: $|\imath\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}| \approx E'\phi \ll m_0c^2\phi$

3. [*7 Punkte*] **Schrödinger-Form der Klein-Gordon-Gleichung**

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie, dass für den freien Fall jede Komponente der Schrödingerschen Form

$$\left(\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_f\right)\Psi = 0, \qquad \hat{H}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m_0c^2, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

$$\rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta(\phi+\chi) + m_0c^2\phi, \qquad i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = +\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta(\phi+\chi) - m_0c^2\chi$$

der Klein-Gordon-Gleichung genügt.
Hinweis: Zeigen sie, dass $(\phi + \chi)$ und $(\phi - \chi)$ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen.

$\boxed{2}$ (b) Lösen Sie die freie Klein-Gordon-Gleichung in Schrödinger-Form mit Hilfe des Ansatzes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{\frac{\imath}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)}.$$

$\boxed{2}$ (c) Diskutieren Sie den nichtrelativistischen Grenzfall der Lösung aus b).
Hinweis: Entwickeln Sie die Normierungskonstante A sowie ϕ_0 und χ_0 in v/c.

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de

4. [*20 Punkte*] **Dirac-Gleichung**

Der relativistische Hamiltonoperator für Fermionen ist gegeben durch

$$\hat{H}_{\text{Dirac}} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + mc^2\hat{\beta} \quad \text{mit} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbb{1}}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{\mathbb{1}}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_j \\ \hat{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix} \quad j = x, y, z \quad .$$

Dabei beschreiben $\hat{\sigma}_j$ die Pauli-Matrizen.

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass für die Matrizen $\hat{\alpha}_j$ und $\hat{\beta}$ gilt

$$\left\{\hat{\alpha}_m, \hat{\alpha}_n\right\} = 2\delta_{mn}\hat{\mathbb{1}}_4, \quad \left\{\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}\right\} = 0, \quad \hat{\alpha}_j^2 = \hat{\beta}^2 = \hat{\mathbb{1}}_4.$$

$\boxed{3}$ (b) Leiten Sie ausgehend von

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x}) = \hat{H}_{\text{Dirac}}\psi(t, \boldsymbol{x})$$

die kovariante Form der Dirac-Gleichung

$$(\imath\hat{\gamma}^\mu\partial_\mu - m)\psi(t, \boldsymbol{x}) = 0$$

her. Für die γ-Matrizen gilt $\hat{\gamma}^\mu = (\hat{\beta}, \hat{\beta}\,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$.

$\boxed{3}$ (c) Geben Sie $\hat{H}^2_{\text{Dirac}}$ an und zeigen Sie, dass die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2$ erfüllt ist. Diskutieren Sie die Eigenenergien eines ruhenden Teilchens.

$\boxed{5}$ (d) Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes

$$\psi\,(t, \boldsymbol{x}) = \psi e^{\frac{\imath}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)} \quad \text{mit} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

die Lösung der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen.

$\boxed{3}$ (e) Zeigen Sie, dass für den Drehimpulsoperator $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ und den Spinoperator $\hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix}$ folgende Kommutatorrelationen gelten:

$$\left[\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{H}_{\text{Dirac}}\right] = \imath\hbar c\,(\hat{\alpha} \times \hat{\boldsymbol{p}}) \quad , \quad \left[\hat{\boldsymbol{S}}, \hat{H}_{\text{Dirac}}\right] = -\imath\hbar c\,(\hat{\alpha} \times \hat{\boldsymbol{p}}) \quad .$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

$\boxed{4}$ (f) Zeigen Sie, dass aus der zeitunbhängigen Dirac-Gleichung für ein Teilchen mit Ladung e im elektromagnetischen Feld

$$\left[c\hat{\alpha} \cdot \hat{\pi} + mc^2\hat{\beta} + e\hat{\phi}\right]\psi = E\psi \quad \text{mit} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

mit dem kanonischen Impuls $\hat{\pi} = \hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\hat{\boldsymbol{A}}$ im nichtrelativistischen Grenzfall die Pauli-Gleichung für die Komponente ψ_A folgt:

$$\left[\frac{\hat{\pi}^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{B}} + e\hat{\phi}\right]\psi_A = \left(E - mc^2\right)\psi_A \quad .$$

Interpretieren Sie den Term $-\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{B}}$ in Hinblick auf den Zusammenhang zwischen Spin und magnetischem Moment des Dirac-Teilchens.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{\pi})^2 = \hat{\pi}^2 + \sum_{i<j}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\left[\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j\right] \quad .$$

Benjamin Bogner, E2 6, Zi.4.27 — bbogner@lusi.uni-sb.de
Anne Hafner, E2 6, Zi.4.23 — anne.hafner@lusi.uni-sb.de