1. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 18.04.2018 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*12 Punkte*] **Schrödingergleichung eines freien Teilchens**

Die Schrödingergleichung lautet

$$\imath\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) \quad .$$

$\boxed{2}$ (a) Zeigen Sie, dass die ebene Welle $\Psi(x,t) = A\, e^{\imath(kx-\omega t)}$ eine Lösung der SGL in 1D für ein freies Teilchen ist. Welche Relation besteht zwischen ω und k?

$\boxed{3}$ (b) Betrachten Sie nun zwei Lösungen $\Psi_1(x,t) = A\, e^{\imath(k_1 x-\omega_1 t)}$ und $\Psi_2(x,t) = B\, e^{\imath(k_2 x-\omega_2 t)}$ der SGL mit $m_1 = m_2 = m$. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion eines Teilchens entspricht dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Zeigen Sie am Beispiel von $\Psi_1(x,t)$, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im gesamten Raum konstant ist.
Zeigen Sie, dass die Superposition beider Lösungen $\Psi_1(x,t)$ und $\Psi_2(x,t)$ wieder eine Lösung der SGL ist und bestimmen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Falle der Superposition. Was fällt dabei auf?

$\boxed{3}$ (c) Um räumlich lokalisierte Wahrscheinlichkeitsdichten zu erhalten, muss die Superposition unendlich vieler ebener Wellen betrachtet werden, die man als Wellenpaket darstellen kann.
Zeigen Sie dazu zuerst, dass die Deltafunktion durch das folgende Integral dargestellt werden kann:

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{\imath kx}.$$

Hinweis: Führen Sie diese Form der Deltafunktion durch Ergänzung eines quadratischen Terms ($-\varepsilon k^2, \lim_{\varepsilon\to 0}, \varepsilon > 0$) im Exponenten auf die bekannte Darstellung der Deltafunktion

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad , \quad a > 0$$

zurück.

$\boxed{4}$ (d) Der Zustand eines freien Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x,0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} e^{\imath kx} dk \quad .$$

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens bei $t = 0$ der Gaußverteilung

$$|\Psi(x,0)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} e^{-\frac{2x^2}{a^2}}$$

entspricht.
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(\xi+\beta)^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$

2. [*9 Punkte*] **Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte für ein Gauß-Wellenpaket**

Gegeben sei ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{N}{b(t)} e^{\imath k_0(x-r(t))} e^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b^2(t)}} \quad (N \in \mathbb{R})$$

$$\text{mit} \quad r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m} t \quad , \quad b^2(t) = \frac{1}{4a^2} + \imath\frac{\hbar t}{2m} \quad .$$

$\boxed{3}$ (a) Bestimmen Sie N so, dass gilt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 = 1 \quad .$

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

3 (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ und daraus den Erwartungswert $\langle x \rangle$.

3 (c) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$.

3. [*4 Punkte*] **Lineare Operatoren und Kommutatoren**

Der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ ist durch $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ gegeben.

2 (a) Drücken Sie den Kommutator $\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right]$ der drei linearen Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ durch die Kommutatoren $\left[\hat{A}, \hat{C}\right]$ und $\left[\hat{B}, \hat{C}\right]$ aus.

2 (b) Zeigen Sie die Gültigkeit der Relation

$$\left[\hat{A}^m, \hat{B}\right] = m\hat{A}^{m-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$$

falls $\left[\left[\hat{A}, \hat{B}\right], \hat{A}\right] = 0$ für $m \in \mathbb{N}$ gilt.

4. [*15 Punkte*] **Diagonalisierung hermitischer Matrizen**

5 (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender 5×5 Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 & \imath & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

5 (b) Bestimmen Sie die spurfreie 3×3 Matrix A, deren Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ lauten.

5 (c) Die 2×2 Matrix B sei gegeben durch:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2\imath \\ -2\imath & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie $e^{\imath B}$.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de