Ihre Lösung ist bis zum 20.06.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*12 Punkte*] **Zylindersymmetrisches Problem**

Gegeben sei ein zylindersymmetrisches Potential $V(\hat{\rho})$ mit $\hat{\rho} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}$.

2 (a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2M} + V(\hat{\rho})$ sowohl mit der z-Komponente des Bahndrehimpulsoperators $\hat{L}_z$ als auch mit der z-Komponente des Impulsoperators $\hat{p}_z$ vertauscht.

2 (b) Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator in der Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\rho^2}{2M} + \frac{\hat{p}_z^2}{2M} + \frac{\hat{L}_z^2}{2M\rho^2} + V(\hat{\rho}) \quad \text{mit} \quad \hat{p}_\rho^2 = \left(\frac{\hbar}{\imath}\right)^2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$$

schreiben lässt. Beachten Sie dabei, dass $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{\imath}\frac{\partial}{\partial\phi}$ in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) ist.

3 (c) Wählen Sie für die gemeinsamen Eigenfunktionen von $\hat{H}$, $\hat{L}_z$ und $\hat{p}_z$ den Ansatz

$$\psi(\rho, \phi, z) = R(\rho) f(\phi) g(z) \quad ,$$

wobei $f(\phi)$ Eigenfunktion von $\hat{L}_z$ und $g(z)$ Eigenfunktion von $\hat{p}_z$ ist. Zeigen Sie dann, dass $R(\rho)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} + \left(\alpha - \frac{2MV(\rho)}{\hbar^2} - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

mit $\alpha = 2ME/\hbar^2 - k_z^2$ genügt. Hier steht E für die Energieeigenwerte, $\hbar m$ für die Eigenwerte von $\hat{L}_z$ und $\hbar k_z$ für die Eigenwerte von $\hat{p}_z$.

5 (d) Betrachten Sie nun ein freies Teilchen, das in einem unendlich langen Zylinder (Radius r_0) mit hartem Mantel (d. h. $V = \infty$ außerhalb des Zylinders) eingesperrt ist. Es soll ferner $\hat{L}_z = \hat{p}_z = 0$ gelten. Bestimmen Sie $R(\rho)$ mithilfe eines Potenzreihenansatzes $R(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$ mit $a_1 = 0$ und $a_0 = 1$. Welche Quantisierungsregel für α bzw. E ergibt sich aus der Randbedingung?
Hinweis: Besselfunktion 0. Ordnung: $J_0(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$.

2. [*7 Punkte*] **Drehimpulsoperator / Spinoperator / Spinmessung**

Spin ist ein intrinsischer Drehimpuls eines Teilchens. Wir bezeichnen den dazugehörigen Drehimpulsoperator oft auch als Spinoperator $\hat{\boldsymbol{S}}$ und ersetzen die Quantenzahl j durch s. In dieser Aufgabe werde ein Teilchen mit Spin 1/2 betrachtet, z. B. ein Elektron.

4 (a) Ein Spin $s = 1/2$ sei in einem Zustand, in dem die z-Komponente des Spins den Wert $+\hbar/2$ hat. Wie lauten die möglichen Messwerte bei einer Messung der Spinkomponente bzgl. einer Richtung, die mit der z-Achse den Winkel θ einschließt? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für diese Messwerte.

3 (b) Betrachten Sie den unitären Operator $\hat{D}_z(\theta) = \exp(-\imath\theta\hat{S}_z/\hbar)$. Drücken Sie den Operator $\hat{D}_z^\dagger(\theta)\hat{S}_x\hat{D}_z(\theta)$ durch die Komponenten des Spinoperators $\hat{\boldsymbol{S}}$ aus.

3. [*4 Punkte*] **Addition von Drehimpulsen / Clebsch-Gordan-Koeffizienten**

3 (a) Zwei Drehimpulse $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ koppeln zu einem Gesamtdrehimpuls $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2$. Berechnen Sie für $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$ sämtliche Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

1 (b) Ein Teilchen mit dem Spin $s = 1/2$ habe den Bahndrehimpuls $l = 1$. Der Gesamtdrehimpuls sei $j = 3/2$ und es sei $m_j = 1/2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der z-Komponente des Spins den Wert $m_s = 1/2$ liefert?

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

4. [*8 Punkte*] **Neutrinooszillation**

Neutrinos sind Teilchen sehr geringer Masse, die bei radioaktiven Zerfällen entstehen. Es gibt drei bekannte Arten, von denen jeweils Teilchen und Antiteilchen existieren: Elektron-Neutrino ν_e, Myon-Neutrino ν_μ und Tau-Neutrino ν_τ. Zur Vereinfachung werden wir das Tau-Neutrino ignorieren und das System aus ν_e und ν_μ isoliert behandeln. Entsprechende experimentelle Realisierungen können in Teilchenbeschleunigern mittels π^--Mesonenzerfall (Antipionenzerfall) erzeugt werden:

$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu \quad , \quad \pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e \quad . \tag{1}$$

In der Neutrinophysik werden zwei Basen verwendet:

- Die Eigenzustände $|\nu_e\rangle$ und $|\nu_\mu\rangle$ der schwachen Wechselwirkung.
- Die Eigenzustände $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_2\rangle$ des Hamiltonoperators, die durch

$$\hat{H}\,|\nu_1\rangle = E_1\,|\nu_1\rangle \quad \text{und} \quad \hat{H}\,|\nu_2\rangle = E_2\,|\nu_2\rangle \quad \text{mit} \quad E_i = \sqrt{p^2c^2 + m_i^2c^4} \approx pc + p^2c^2 + \frac{m_i^2c^4}{2pc}$$

gegeben sind, wobei m_1 und m_2 die Massen, c die Lichtgeschwindigkeit und p der Impuls sind.

Des Weiteren lässt sich die Geschwindigkeit der Neutrinos sehr gut durch die Lichtgeschwindigkeit c approximieren. Der Zustand der in Gleichung (1) produzierten Teilchen sei durch

$$|\nu_e\rangle = \cos(\theta)\,|\nu_1\rangle + \sin(\theta)\,|\nu_2\rangle \quad , \quad |\nu_\mu\rangle = -\sin(\theta)\,|\nu_1\rangle + \cos(\theta)\,|\nu_2\rangle \tag{2}$$

gegeben, wobei θ ein beliebiger Winkel sei.

(a) Zur Zeit $t = 0$ werde ein Neutrino mit Impuls p im Zustand $|\nu_\mu\rangle$ erzeugt.

$\boxed{2}$ i. Berechnen Sie den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$.

$\boxed{4}$ ii. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das Neutrino im Zustand $|\nu_e\rangle$ bei $t > 0$ zu detektieren? Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von θ, c, p, t und $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ an.

$\boxed{1}$ (b) Die Messung finde im Abstand ℓ vom Entstehungsort statt. Schreiben Sie die obige Wahrscheinlichkeit als Funktion von ℓ.

$\boxed{1}$ (c) Nehmen Sie den Zustand aus Gleichung (2) für $\theta = \frac{\pi}{4}$ an. In welcher Entfernung ℓ ist die Zahl der detektierten ν_e maximal unter der Annahme, dass $\Delta m^2c^4 = 1eV^2$ und $pc = 10\,GeV = 10^{10}\,eV$ ist? Geben Sie das Resultat in km an.

5. [*9 Punkte*] **Zeitentwickelung einer Wellenfunktion**

Die zeitliche Entwicklung einer Wellenfunktion kann auch in integraler Form geschrieben werden.

$\boxed{3}$ (a) Stellen Sie die Lösung $\psi(x,t)$ der Schrödingergleichung für freie Teilchen in der Form

$$\psi(x,t) = \int dx'\,K(x,t;x',0)\psi(x',0) \tag{$*$}$$

dar und bestimmen Sie $K(x,t;x',0)$ (Propagator oder auch Greensche Funktion).

$\boxed{1}$ (b) Der Propagator $K(x,t;x',0)$ hängt nur vom Potential (in diesem Aufgabenteil ist $V(x) = 0$) ab und ist unabhängig von der anfänglichen Wellenfunktion. Ist die anfängliche Wellenfunktion $\psi(x,0)$ gegeben, so kann mithilfe der Relation $(*)$ die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zu einem späteren Zeitpunkt bestimmt werden.
Es sei $\psi(x,0) = \delta(x - x_0)$. Bestimmen Sie die Wellenfunktion zur Zeit $t > 0$.

$\boxed{3}$ (c) Betrachten Sie nun ein Teilchen in 1D, welches sich in einem konstanten Kraftfeld $f(\in \mathbb{R})$ befindet. Formulieren Sie die zeitabhängige und die stationäre Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung. Berechnen Sie die Energieeigenzustände in der Impulsdarstellung $u_E(p) = \langle p|u_E\rangle$. Normieren Sie $u_E(p)$ auf die δ-Funktion: $\langle u_E|u_{E'}\rangle = \delta(E - E')$.

$\boxed{2}$ (d) Zeigen Sie, dass der Propagator aus Aufgabenteil (c) im Impulsraum die folgende Gestalt hat:

$$K(p,t;p',0) = \delta(p - p' - ft)e^{\imath\frac{p'^3 - p^3}{6m\hbar f}} \quad .$$

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 — sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24 — johannes@lusi.uni-sb.de