11. Übung

Ihre Lösung ist bis zum 27.06.2018 um 14 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [*12 Punkte*] **Der Permutationsoperator im Zweiteilchensystem**

Betrachtet werden zwei Teilchen in einer Raumdimension. Der Permutationsoperator $\hat{P}_{(12)}$, der im Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \bigotimes \mathcal{H}^{(2)}$ der Einteilchen-Bahnhilberträume $\mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}$ der Vertauschung der Bahnzustände der beiden Teilchen zugeordnet ist, kann formal durch seine Wirkung im Basissystem der gemeinsamen Eigenzustände $|x_1 x_2\rangle = |x_1\rangle^{(1)} |x_2\rangle^{(2)}$ der Ortsoperatoren von Teilchen 1 bzw. 2 gemäß

$$\hat{P}_{(12)} |x_1 x_2\rangle := |x_2 x_1\rangle$$

definiert werden.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$\boxed{2}$ i. $\hat{P}^{-1}_{(12)} = \hat{P}^{\dagger}_{(12)} = \hat{P}_{(12)}$,

$\boxed{1}$ ii. $\hat{P}_{(12)}$ nur die Eigenwerte $c_{12} = +1, -1$ besitzen kann und

$\boxed{2}$ iii. die Vektoren

$$\begin{aligned}
|xx\rangle_s &= |xx\rangle \\
|x_1 x_2\rangle_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x_1 x_2\rangle + |x_2 x_1\rangle \right), \quad x_1 \neq x_2 \\
|x_1 x_2\rangle_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x_1 x_2\rangle - |x_2 x_1\rangle \right), \quad x_1 \neq x_2
\end{aligned}$$

Eigenvektoren von $\hat{P}_{(12)}$ sind.

$\boxed{3}$ (b) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Aufgabenteil, dass für die Orts- und Impulsoperatoren zweier Teilchen gilt

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{(12)} \hat{x}^{(1)} \hat{P}^{\dagger}_{(12)} &= \hat{x}^{(2)}, \qquad & \hat{P}_{(12)} \hat{x}^{(2)} \hat{P}^{\dagger}_{(12)} &= \hat{x}^{(1)}, \\
\hat{P}_{(12)} \hat{p}^{(1)} \hat{P}^{\dagger}_{(12)} &= \hat{p}^{(2)}, \qquad & \hat{P}_{(12)} \hat{p}^{(2)} \hat{P}^{\dagger}_{(12)} &= \hat{p}^{(1)}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (c) Der Hamiltonoperator eines Systems zweier spinloser Teilchen gleicher Masse in einer Dimension hat die Form

$$\hat{H} = \frac{\left(\hat{p}^{(1)}\right)^2}{2m} + \frac{\left(\hat{p}^{(2)}\right)^2}{2m} + V\left(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}\right),$$

wobei $V\left(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}\right) = V\left(\hat{x}^{(2)}, \hat{x}^{(1)}\right)$ gelten soll.

Zeigen Sie, dass wenn $u(x_1, x_2)$ Eigenfunktion von $\hat{H}$ zu einem einfachen Eigenwert E ist, gilt entweder $u(x_2, x_1) = +u(x_1, x_2)$ oder $u(x_2, x_1) = -u(x_1, x_2)$.

Hinweis: Die Spektraldarstellung des Potentials ist gegeben durch

$$V\left(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}\right) = \iint dx_1 \, dx_2 \; |x_1 x_2\rangle \, V(x_1, x_2) \, \langle x_1 x_2| \, .$$

2. [*6 Punkte*] **Variationsverfahren**

Benutzen Sie als Testfunktion für das attraktive Delta-Potential $V = -aV_0 \delta(x)$ eine Gauß-Funktion. Berechnen Sie die obere Schranke für die Grundzustandsenergie E_0 und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit der exakten Lösung.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de

Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

3. [*8 Punkte*] **Nicht entartete Störungsrechnung**

Der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveau-Systems sei in der Energiedarstellung gegeben durch die 2×2-Matrix

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \quad .$$

Wir betrachten zum Vergleich ein System mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{W} = \hat{H}_0 + \lambda \begin{pmatrix} V_1 & U \\ U^* & V_2 \end{pmatrix} \quad .$$

$\boxed{4}$ (a) Betrachten Sie $\lambda \hat{W}$ als kleine Störung ($0 < \lambda \ll 1$) und berechnen Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ bis zur zweiten Ordnung mittels Störungstheorie.

$\boxed{4}$ (b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ exakt. Zeigen Sie, dass das exakte Resultat im Grenzfall $\lambda |W_{ij}| \ll |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ in das Ergebnis aus Teil a) übergeht (W_{ij} bezeichnet die Matrixelemente von $\hat{W}$).

4. [*14 Punkte*] **Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld**

Das Potential eines Oszillators in einem elektrischen Feld $\vec{E} = E_e \vec{e}_x$ lautet

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 - qE_e \hat{x} \quad .$$

$\boxed{3}$ (a) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung dieses System.

$\boxed{4}$ (b) Bestimmen Sie störungstheoretisch die Energien bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung für kleines $\lambda := qE_e$.

$\boxed{7}$ (c) Nutzen Sie zur Bestimmung einer oberen Grenze für die Grundzustandsenergie das Variationsverfahren mit dem Variationsparameter x_0.
Der Zustand sei $\varphi_0(x) = c_0 e^{-\frac{1}{2\alpha^2}(x-x_0)^2}$, wobei $\alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ und $c_0 = (\frac{1}{\pi\alpha^2})^{\frac{1}{4}}$.

i. Zeigen sie hierfür zunächst, dass

$$\langle \varphi_0 | \hat{H} | \varphi_0 \rangle = x_0^2 \frac{m\omega^2}{2} - x_0 q E_e + \frac{m\omega^2 \alpha^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4m\alpha^2} \quad .$$

ii. Bestimmen Sie nun x_0 und die obere Grenze für die Grundzustandsenergie.

iii. Gibt es Abweichungen zur exakten Lösung? Begründen Sie dies.

Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
`sadjadi@lusi.uni-sb.de` `johannes@lusi.uni-sb.de`