

Ihre Lösung ist bis zum 11.07.2018 um 14 Uhr in das Postfach von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

1. [20 Punkte] Coulomb-Potential / Wasserstoffatom / quadratischer Stark-Effekt

Das Wasserstoffatom besitzt ein Elektron mit der Elementarladung $-e$ im Coulomb-Potential $V(r) = -\frac{e^2}{r}$. Der Winkelanteil der Eigenfunktionen des Hamiltonoperators wird von den Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ beschrieben. Im ersten Teil dieser Aufgabe untersuchen wir den Radialanteil $f(r)$ der Wellenfunktionen, welcher die Eigenwertgleichung

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + V(r) \right\} f(r) = E f(r)$$

zum Energieeigenwert E erfüllt. Als Längen- und Energie-Einheiten benutzt man den Bohr-Radius $a_0 = \hbar^2/(me^2)$ und die Rydberg-Energie $R = e^2/(2a_0)$. In der Vorlesung wurden zwei dimensionslose Größen eingeführt:

$$\nu^2 = -\frac{R}{E} \quad \text{und} \quad x = \frac{2}{\nu} \frac{r}{a_0} \quad .$$

Mit einem passenden Lösungsansatz $y_l \equiv r f(r) = x^{l+1} e^{-\frac{1}{2}x} v_l(x)$ erhält man:

$$\left\{ x \frac{d^2}{dx^2} + (2l+2-x) \frac{d}{dx} - (l+1-\nu) \right\} v_l(x) = 0 \quad . \quad (1)$$

- 6 (a) Verwenden Sie den Potenzreihenansatz $v_l(x) = \sum_k a_k x^k$ für Gl. (1). Zeigen Sie, dass die Reihe bei einer bestimmten Potenz n_r abbrechen muss, sodass $\nu \equiv n = l + 1 + n_r$ ($n_r = 0, 1, 2, \dots$) und das Energiespektrum E_n diskret ist.
- 6 (b) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von r im Zustand mit den Quantenzahlen n und l gilt

$$\langle r \rangle_{nl} = \frac{a_0}{2} [3n^2 - l(l+1)] \quad .$$

Hinweis: Bestimmen Sie hierfür zunächst einen Ausdruck für $\int_0^\infty dr r^N y y''$ bzw. $\int_0^\infty dr 2r^{N+1} y y'$ und folgern Sie daraus die Rekursionsrelation für die Erwartungswerte der Potenzen von r mit $N \geq -2l - 1$:

$$\frac{N+1}{n^2} \langle r^N \rangle - (2N+1)a_0 \langle r^{N-1} \rangle + \frac{N a_0^2}{4} [(2l+1)^2 - N^2] \langle r^{N-2} \rangle = 0 \quad .$$

- 8 (c) Wir untersuchen nun den Einfluss eines äußeren, schwachen elektrischen Feldes auf den Grundzustand des Wasserstoffatoms, wobei die Spin-Freiheitsgrade nicht berücksichtigt werden. Die Störung durch das elektrische Feld in z -Richtung ist gegeben durch $\hat{H}_1 = e\mathcal{E}z = e\mathcal{E}r \cos \theta$.
- Bestimmen Sie die Energieverschiebung des Grundzustandes durch \hat{H}_1 mittels Störungstheorie zweiter Ordnung. Überlegen Sie zunächst, welche der Erwartungswerte, die in zweiter Ordnung Störungsrechnung auftauchen, nicht verschwinden. Um eine grobe Abschätzung der Energieverschiebung zu erhalten, bestimmen Sie den ersten Summanden dieser Entwicklung.
 - Wenden Sie das Variationsverfahren an, um die obere Schranke der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms im \mathcal{E} -Feld abzuschätzen, und verwenden Sie hierzu die Probefunktion

$$\psi_\lambda(\mathbf{r}) = N(1 + \lambda e\mathcal{E}z)\varphi_0(\mathbf{r}),$$

wobei λ der Variationsparameter, φ_0 die Grundzustandswellenfunktion des ungestörten (feldfreien) Atoms und N die Normierungskonstante ist. Vernachlässigen Sie Terme, die dritter Ordnung in \hat{H}_1 sind. Vergleichen Sie das Resultat mit dem aus der Störungstheorie.

2. [11 Punkte] Hyperfeinstruktur

Betrachten Sie eine vereinfachte Form der Wechselwirkung zwischen Elektronenspin \hat{S}_e und Protonenspin \hat{S}_p , die im Wasserstoffatom das Auftreten der Hyperfeinstruktur verursacht:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} - \frac{e^2}{r} + \lambda(\hat{S}_p \cdot \hat{S}_e) \quad ,$$

wobei λ ein Parameter ist. Vernachlässigen Sie alle anderen Störungen.

(a) Nehmen Sie an, das Atom sei zu Beginn (zur Zeit $t = 0$) im Grundzustand des vom Spin unabhängigen Teils des Hamiltonoperators, mit Protonenspin 'up' und Elektronenspin 'down', also im Zustand $|n = 1, \ell = 0, m_\ell = 0\rangle \otimes |\uparrow_p\rangle \otimes |\downarrow_e\rangle$.

3

i. Bestimmen Sie die Wellenfunktion zu späteren Zeitpunkten $t > 0$.

2

ii. Wie ist die Wahrscheinlichkeit, den Protonenspin im Zustand 'down' zu finden?

3

iii. Berechnen Sie den Erwartungswert des magnetischen Dipolmoments

$$\hat{\mu} = \frac{e}{2m_e c} \hat{L} + \frac{g_e \mu_e}{\hbar} \hat{S}_e - \frac{g_p \mu_p}{\hbar} \hat{S}_p$$

des Systems zu beliebigen Zeitpunkten.

3

(b) Der Operator des totalen 'Winkelmoments' ist gegeben durch $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}_p + \hat{S}_e$. Was sind die erlaubten Werte der Quantenzahl j ? Betrachten Sie einen Zustand mit $n = 5$, gerader Parität und $j = 3$. Was ist der totale Spin eines solchen Zustands? Wie groß ist der Energieunterschied zwischen diesem Zustand und einem Zustand mit $n = 2$, ungerader Parität und $j = 0$?

3. [9 Punkte] Zeeman-Effekt und Spin-Bahn-Kopplung

Ein Elektron in einem p -Zustand des Wasserstoffatoms befinde sich in einem homogenen Magnetfeld in z -Richtung. Wir berücksichtigen den Hamilton-Operator des Systems, der den Spin-Bahn-Term \hat{H}_{LS} und den Zeeman-Term \hat{H}_B enthält:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{2W}{\hbar^2} \hat{L} \cdot \hat{S}}_{\hat{H}_{LS}} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\hbar} B (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)}_{\hat{H}_B} \quad ,$$

wobei W eine Konstante und μ_B das Bohrsche Magneton ist.

3

(a) Berechnen Sie die exakten Energieeigenwerte von \hat{H} .

3

(b) Im Grenzfall des schwachen Magnetfelds $\mu_B B \ll W$ kann der Zeeman-Term als Störung gegenüber dem Spin-Bahn-Term betrachtet werden. Berechnen Sie im Rahmen der Störungstheorie erster Ordnung die Energieeigenwerte.

3

(c) Berechnen Sie störungstheoretisch die Energieeigenwerte in erster Ordnung in W für den Fall, dass das Magnetfeld stark gegenüber W ist, also $W \ll \mu_B B$.

Bemerkung: Sie können die aus der Vorlesung bekannten Clebsch-Gordan-Koeffizienten direkt benutzen.