# 2. Übung

Theoretische Physik (FR NT)
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Heiko Rieger

Ihre Lösung ist bis zum 25.04.2018 um 12 Uhr in das Postfach
von Prof. Dr. Heiko Rieger im Erdgeschoss von Gebäude E2 6 einzuwerfen.

## 1. [*6 Punkte*] Impulsoperator im Ortsraum

Der Impulsoperator ist in der Ortsdarstellung gegeben durch $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{\imath}\nabla$.

3 (a) Zeigen Sie, dass für den Kommutator der Orts- und Impulsoperatoren

$$[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = \imath\hbar\delta_{jk}\hat{\mathbb{1}}$$

gilt, wobei $\hat{r}_j$ ($\hat{p}_k$) die $x$-, $y$- oder $z$-Komponente von $\hat{\mathbf{r}}$ ($\hat{\mathbf{p}}$) ist. Zeigen Sie ferner die Vertauschungsregel

$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \quad .$$

Hinweis: Zur Berechnung der Kommutatoren sollten Sie diese immer auf eine Funktion $f$ anwenden, berechnen Sie also $[\hat{A}, \hat{B}]f$ .

3 (b) Bestimmen Sie die Kommutatoren

$$[\hat{x}, \hat{p}_x^2] \quad \text{und} \quad [\hat{x}^2, \hat{p}_x^2] \quad .$$

Dabei bezeichnet $\hat{p}_x$ die $x$-Komponente von $\hat{\mathbf{p}}$ und $\hat{x}$ die $x$-Komponente von $\hat{\mathbf{r}}$

Hinweis: Verifizieren Sie zuerst die nützliche Kommutatorrelation $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ für drei beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$.

## 2. [*14 Punkte*] Zeitentwicklung des Erwartungswerts einer Observable

4 (a) Der Erwartungswert einer Observable $\hat{A}$ im Zustand $\psi$ wird gegeben durch

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A}\psi \rangle = \int d^3r\, \psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{A}\psi(\mathbf{r}, t) \quad .$$

Zeigen Sie unter Benutzung der Schrödingergleichung, dass die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A} \rangle = \frac{\imath}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle \tag{4.1}$$

gilt, wobei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator ist.

5 (b) Mithilfe der Bewegungsgleichung (4.1) untersuchen wir die Zeitentwicklung der Orts- und Impulsunschärfen eines freien Teilchens der Masse $m$ in einer Dimension. Zeigen Sie, dass die Relationen

$$(\Delta x)_t^2 = (\Delta x)_0^2 + \frac{2}{m}\left[\frac{1}{2}\langle \hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p} \rangle_0 - \langle \hat{x} \rangle_0 \langle \hat{p} \rangle_0\right] t + \frac{(\Delta p)_0^2}{m^2} t^2 \tag{4.2}$$

und

$$(\Delta p)_t^2 = (\Delta p)_0^2 \tag{4.3}$$

gelten, wobei der Index $t$ für einen Zeitpunkt $t > 0$ und der Index 0 für den Zeitpunkt $t = 0$ stehen.

5 (c) Wenden Sie Gl. (4.2) und Gl. (4.3) auf ein Teilchen an, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch das Wellenpaket $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}d}} e^{-\frac{x^2}{2d^2} + \imath k_0 x}$ beschrieben wird. Wie entwickelt sich die Breite des Wellenpakets? Alle auftretenden Integrale sollen ohne Nutzung von Integraltabellen oder Computern ausgewertet werden.


Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23
sadjadi@lusi.uni-sb.de
Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
johannes@lusi.uni-sb.de

**3.** [*5 Punkte*] **Zeitentwicklung einer freien Wellenfunktion**

$\boxed{3}$ (a) Bestimmen Sie die Eigenfunktion $u_p(x)$ des Impulsoperators $\hat{p}$ zum Eigenwert $p$ im eindimensionalen Ortsraum. Wählen Sie die Normierungskonstante von $u_p(x)$ so, dass die Orthonormierungsbedingung $\langle u_{p'}|u_p\rangle = \delta(p-p')$ erfüllt ist.

$\boxed{2}$ (b) Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse $m$ in einer Raumrichtung wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, die sich als Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) = 0$$

(mit einer Anfangsbedingung $\psi(x,0)$) ergibt. Geben Sie eine plausible Begründung dafür (ohne Einsetzen in die Schrödingergleichung), dass sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichnung schreiben lässt als

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\tilde{\psi}(p)\,e^{\frac{\imath}{\hbar}\left[px-\frac{p^2}{2m}t\right]} \quad ,$$

wobei $\tilde{\psi}(p)$ die Fouriertransformierte der anfänglichen Wellenfunktion $\psi(x,0)$ ist.

**4.** [*15 Punkte*] **Rand- und Eigenwertproblem**

Im Raum $\mathcal{L}^2([-\ell,\ell])$ der komplexwertigen, im reellen Intervall $-\ell \le x \le \ell$ quadratisch integrierbaren Funktionen ist das Skalarprodukt definiert als

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} dx\, f^*(x)g(x), \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^2([-\ell,\ell]) \quad ,$$

wobei „$*$" für die komplexe Konjugation steht.
Betrachten Sie einen Unterraum $\mathcal{F}$ derjenigen Funktionen, deren erste und zweite Ableitungen ebenfalls in $\mathcal{L}^2([-\ell,\ell])$ liegen und deren Funktionswerte auf dem Rand von $[-\ell,\ell]$ verschwinden. Es gelte also $f(-\ell) = f(\ell) = 0$. Ferner sei der lineare Operator $\hat{\Delta} \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{F}$ gegeben.

$\boxed{3}$ (a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Delta}$ in $\mathcal{F}$ hermitesch ist, d. h. $\langle g|\hat{\Delta}\, f\rangle = \langle \hat{\Delta}\, g|f\rangle\,, \forall g,f \in \mathcal{F}$.
Ist der Differentialoperator $\hat{D} \equiv \frac{d}{dx}$ in $\mathcal{F}$ auch hermitesch?

$\boxed{3}$ (b) Betrachten Sie das Eigenwertproblem von $-\hat{\Delta}$. Es handelt sich also um die Differentialgleichung

$$-\hat{\Delta}\,u = \lambda\,u \quad \text{mit} \quad u \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad . \qquad (*)$$

Unterscheiden Sie drei Fälle: $\lambda = 0$, $\lambda = -k^2 < 0$ und $\lambda = k^2 > 0$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen für die Fälle, in denen eine nichttriviale Lösung $u(x) \neq 0$ der Gl. $(*)$ existiert. Die Eigenfunktion von $-\hat{\Delta}$ zu dem Eigenwert $\lambda_n$ $(n = 1,2,\dots)$ wird als $u_n(x)$ bezeichnet.

$\boxed{4}$ (c) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen von $-\hat{\Delta}$ orthogonal sind, d. h. $\langle u_n|u_m\rangle = 0$ für $n \neq m$. Skizzieren Sie die Eigenfunktionen zu den drei kleinsten Eigenwerten.

$\boxed{5}$ (d) Entwickeln Sie $f(x) = x(l-|x|)$ für $-l \le x \le l$ in eine Reihe (die Fourierreihe) nach den Eigenfunktionen $u_n(x)$ von $-\hat{\Delta}$. Benutzen Sie die Orthonormalität der Eigenfunktionen, um die Entwicklungskoeffizienten zu bestimmen, wobei alle auftretenden Integrale ohne Nutzung von Integraltabellen oder Computern ausgewertet werden sollen.


Dr. Zeinab Sadjadi, E2 6, Zi.4.23 Johannes Sicks, E2 6, Zi.4.24
sadjadi@lusi.uni-sb.de johannes@lusi.uni-sb.de